

ПОХІДНА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ТА ГАЛУЗІ ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

В цій науковій роботі досліджено такий математичний засіб дослідження функції як похідна третього порядку. Визначено в яких дисциплінах використовуються знання про цей математичний інструмент дослідження функції

Ключові слова: функція, похідна функції, графік функції, ривок.

Abstract

This paper investigates such a mathematical tool for studying a function as the third-order derivative. It is determined in which disciplines knowledge about this mathematical tool of function study is used.

Keywords: function, function derivative, function graph, jerk.

Вступ

Похідна функції описує зміну приросту функції відносно приросту її аргументу. Основне визначення похідної обчислюється за формулою:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідні вищих порядків є послідовними похідними від похідної першого порядку:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)); \quad f'''(x) = \frac{d}{dx}(f''(x)).$$

Похідна – це фундаментальне поняття в математичному аналізі, яке характеризує швидкість зміни функції в певній точці.

За допомогою похідної ми можемо:

- Знаходити екстремуми функції (максимуми і мінімуми).
- Визначати інтервали зростання та спадання функції.
- Визначати опуклість та увігнутість графіка функції.
- Знаходити точки перегину графіка.

Похідна є незамінним інструментом для дослідження функцій. Завдяки їй можна отримати детальну інформацію про поведінку функції, що дозволяє побудувати її графік, розв'язати різноманітні математичні задачі та застосовувати ці знання в інших областях науки і техніки.

Похідна має безліч застосувань в різних областях:

- Фізика: Швидкість, прискорення, сила струму і багато інших величин виражаються через похідні.
- Економіка: Маржинальний аналіз (аналіз граничних величин) базується на понятті похідної.
- Геометрія: Дотичні лінії, нормалі і багато інших геометричних об'єктів пов'язані з поняттям похідної.
- Комп'ютерна графіка: Алгоритми рендерингу і моделювання часто використовують похідні.

Геометричний зміст похідних

1. **Перша похідна:** вказує на проміжки монотонності функції.
 2. **Друга похідна:** описує кривизну графіка (випуклість або опуклість).
 3. **Третя похідна:** визначає, як змінюється кривизна графіка.
- Якщо $f'''(x) > 0$ кривизна стає більш "гострою" (вигин збільшується).

Якщо $f'''(x) < 0$ кривизна стає "плавнішою" (вигин зменшується).

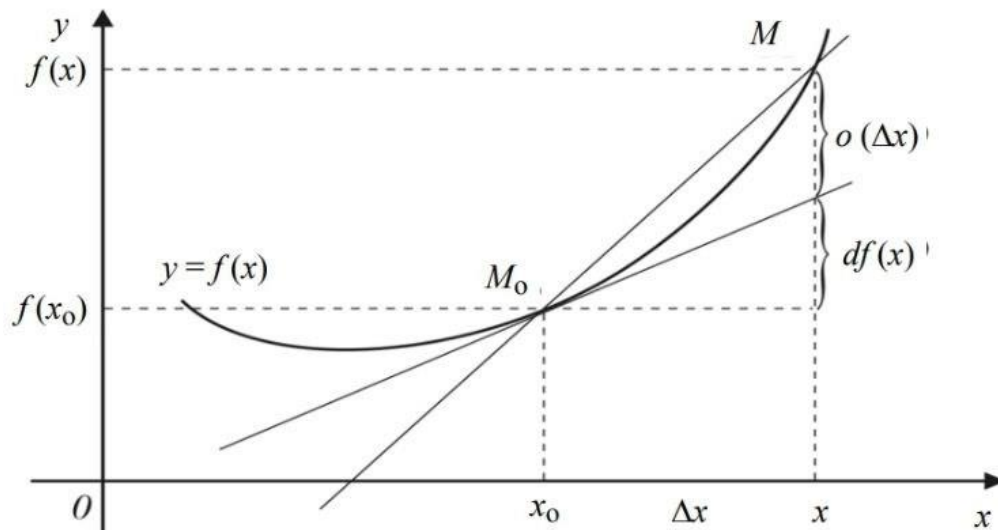


Рис. 1 – Геометричне значення похідної функції

Фізичний зміст похідних

- **Перша похідна:** швидкість зміни функції (наприклад, швидкість об'єкта у часі).
- **Друга похідна:** прискорення (зміна швидкості).
- **Третя похідна:** ривок - показує, наскільки швидко змінюється прискорення.

Ривок – важливе фізичне явище, яке використовується у таких розділах фізики як механіка та динаміка для аналізу руху тіла або передбачення максимального навантаження у матеріалах.

$$s'(t) = v(t).$$

$$v'(t) = a(t).$$

$$a'(t) = j(t).$$

У системі СІ ривок вимірюється в метрах за секунду в кубі (м/с^3).

$$j(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \right).$$

$$a(t) = a_0 + j \cdot t.$$

$$v(t) = v_0 + a_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot j \cdot t^2.$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot j \cdot t^3.$$

Задача (з фізики)

Маємо задачу: Автомобіль рухається за законом $S(t) = 4 \cdot t^4 + 3 \cdot t^3 + t^2 + t$. Визначити в який момент часу значення ривка буде дорівнювати 210 м/с^3 .

Розв'язання

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти похідну третього порядку даної функції.

$$S'(t) = 16 \cdot t^3 + 9 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 1.$$

$$S''(t) = 48 \cdot t^2 + 18 \cdot t + 2.$$

$$S'''(t) = 96 \cdot t + 18.$$

Далі прирівняємо отриманий вираз до заданого значення.

$$96 \cdot t + 18 = 210.$$

$$t = 2.$$

Отже, через 2 секунди після початку руху значення ривка автомобіля буде дорівнювати 210 м/с^3

Задача (з будівництва)

Маємо наступну задачу: Кран підіймає вантаж за законом $L(t) = 6 \cdot t^4 - 3 \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t$. Визначити значення ривка через 5 с після початку підйому.

Розв'язання

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти похідну третього порядку даної функції.

$$L'(t) = 24 \cdot t^3 - 9 \cdot t^2 + 4 \cdot t - 4.$$

$$L''(t) = 72 \cdot t^2 - 18 \cdot t + 4.$$

$$L'''(t) = 144 \cdot t - 18.$$

Тепер підставимо задане значення часу у вираз

$$L'''(5) = 144 \cdot 5 - 18 = 702 \left(\text{м/с}^3 \right).$$

Отже, через 5 секунд після початку підйому значення ривка автомобіля буде дорівнювати 702 м/с^3 .

Застосування ривка в інших галузях

1. У системах керування рухом аналіз ривка використовується для створення плавних траєкторій, щоб уникнути різких змін у русі.
2. Для забезпечення точності роботи роботів та зменшення зношення деталей інженери враховують ривок при створенні алгоритмів управління.
3. У будівельних ліфтах враховується ривок, щоб уникнути деформацій конструкцій через різке прискорення.
4. Ривок аналізується у біомеханіці, наприклад, при дослідженні руху суглобів або оцінці впливу раптових перевантажень на тіло людини.

Висновки

Третя похідна є ключовим інструментом для аналізу складних динамічних процесів у різних галузях. Її практичне застосування дозволяє вдосконалювати моделі руху, розробляти ефективні системи управління та аналізувати складні явища. Оволодіння техніками обчислення третьої похідної є важливим для спеціалістів в області прикладної математики, фізики та інженерії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Краєвський, В. О. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та елементи теорії поля: навчальний посібник / В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – 142 с.
2. Михалевич В. М. Розробка електронних освітніх ресурсів в середовищі СКМ Maple [Текст] / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, Ю. В. Добранюк // Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-практ. конф., 18-19 травня 2017 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. - Вінниця : ФОП Рогальська І. О., 2017.- С. 69-72.
3. Добранюк Ю. В. Застосування СКМ Maple для побудови 2D області в задачі обчислення площі фігури, обмеженої віссю ординат та кубічними функціями синуса та косинуса [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, А. Б. Кукленко, А. В. Лихогляд // Матеріали IV Міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc24/paper/viewFile/21371/17697>
4. Михалевич В. М. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні: монографія / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 180 с. ISBN 978-966-641-532-8.
5. Mykhalevych, V., Dobraniuk, Y., Matviichuk, V., Kraievskiy, V., TiutiunnykO., Smailova, S., & Kozbakova, A. (2023). A comparative study of various models of equivalent plastic strain to fracture. *Informatyka, Automatyka, Pomiary W Gospodarce I Ochronie Środowiska*, 13(1), 64-70. <https://doi.org/10.35784/iapgos.3496>

6. Добранюк Ю. В. Застосування СКМ Maple для побудови 2D області в задачі обчислення площі фігури, обмеженої параболою та лінією / Ю. В. Добранюк, А. В. Лихогляд, А. Б. Кукленко, Я. О. Усенко // LIII Всеукраїнська науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії (2024) : Вінниця, ВНТУ, 20-22 березня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2024/paper/view/20849/17278>.

7. Добранюк Ю. В. Застосування штучного інтелекту для вирішення прикладу з типового розрахунку по темі «інтегрування частинами» [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, Є. В. Удуденко // Матеріали IV Міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmorc/pmorc24/paper/view/21877/18158>.

Добранюк Юрій Володимирович — кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Коробочка Артем Миколайович — студент групи АМ-24б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: artemkorobocka906@gmail.com.

Галановська Вікторія Олегівна — студентка групи БМ-24б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: viktoriya.halyanovska@gmail.com.

Науковий керівник: **Добранюк Юрій Володимирович** — кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Dobranyuk Yuriy V. — Ph.D., Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Korobochka Artem M. — student of group AM-24b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : artemkorobocka906@gmail.com.

Galyanovska Viktoria O. — student of group BM-24b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : viktoriya.halyanovska@gmail.com.

Supervisor: **Dobranyuk Yuriy V.** — Ph.D., Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia