

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ ТА ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТЕЙ У ШАХАХ: МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ СТРАТЕГІЇ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді аналізуються математичні основи стратегії в шахах, зосереджуючись на ролі комбінаторики та теорії ймовірностей. Детально розглядаються методи комбінаторного аналізу для обчислення кількості можливих ходів та варіантів розвитку гри. Пояснюється, як принципи ймовірності використовуються для оцінки перспектив атак, шансів на перемогу в ендшпілях та ризику помилок.

Ключові слова: шахи, оцінка ймовірностей, комбінаторний аналіз.

Abstract

The report analyzes the mathematical foundations of strategy in chess, focusing on the role of combinatorics and probability theory. Methods of combinatorial analysis for calculating the number of possible moves and game development variations are examined in detail. It is explained how the principles of probability are used to assess the prospects of attacks, chances of winning in endgames, and the risk of errors.

Keywords: chess, probability assessment, combinatorial analysis.

Вступ

Шахи – це гра з повною інформацією: всі фігури та їхнє розташування відомі обом гравцям, а правила руху фігур чітко визначені. Ця характеристика робить шахи ідеальним полем для застосування комбінаторного аналізу, адже гравці постійно стикаються з вибором з обмеженої, але часто надзвичайно великої кількості можливих ходів. Теорія ймовірностей, у свою чергу, використовується для оцінки ймовірності успіху або перспектив певного плану, що впливає з комбінаторного аналізу потенційних відповідей опонента.

Комбінаторний аналіз можливих ходів та позицій

Однією з найвражаючих математичних характеристик шахів є астрономічна кількість можливих ходів та унікальних позицій на дошці.

- **Кількість початкових ходів:** з початкової позиції білі мають 20 можливих перших ходів (16 ходів пішаками по два поля та 4 ходи конями). Цей простий комбінаторний підрахунок є першим кроком у «дереві» можливих партій.
- **Ігрове дерево та позиційна складність:** Кожен хід відкриває нові можливості, створюючи величезне «ігрове дерево». Кількість цих можливостей зростає експоненційно. Наприклад, лише після перших двох ходів (по одному для білих і чорних) кількість можливих продовжень гри вже перевищує 400.
- Приблизна кількість легальних шахових позицій була оцінена Клодом Шенноном як близько 1043. Ця цифра отримана шляхом розгляду розміщення фігур на дошці.
- Кількість можливих унікальних шахових партій ще більша, за оцінками Шеннона вона становить приблизно 10120 (відома як число Шеннона). Це число настільки величезне, що значно перевищує кількість атомів у спостережуваному Всесвіті, підкреслюючи величезне комбінаторне багатство шахів.

Зростання кількості можливих ходів у шахах

Таблиця 1. Зростання кількості можливих ходів у шахах

Кількість ходів у партії (наприклад, «10 ходів»)	Загальна кількість можливих варіантів (приблизно)	Опис
1 хід (1-й хід білих)	20	Кількість можливих початкових ходів білих.
2 ходи (1-й хід білих та 1-й хід чорних)	400	Кількість можливих варіантів після першого обміну ходами.
3 ходи (2-й хід білих та 2-й хід чорних)	8902	Кількість варіантів, що стрімко зростає.
4 ходи	~200 000	З кожним ходом кількість можливих розгалужень стає величезною, вимагаючи глибокого комбінаторного прорахунку.
10 ходів (по 5 ходів для кожного гравця)	~100 000 000 000 (10 ¹¹)	Навіть після невеликої кількості ходів кількість можливих комбінацій перевищує можливості людини для повного прорахунку.

Комбінації ходів у тактичних ситуаціях

Комбінаторика широко використовується шахістами для розрахунку та аналізу «форсованих варіантів» – послідовностей ходів, які призводять до певного результату (наприклад, мату, виграшу) незалежно від відповідей суперника.

- Розглянемо ситуацію, коли гравець розраховує форсовану матову комбінацію. Він має перебрати та проаналізувати всі можливі відповіді опонента на кожному кроці, щоб переконатися, що у нього є матуюча відповідь. Якщо гравець планує зробити послідовність з k ходів, і на кожному кроці існує n_i з i можливих відповідей від опонента, то загальна кількість ліній, які потрібно перевірити для цієї послідовності, обчислюється за правилом добутку:

$$N = \prod_{i=1}^k n_i$$

Це пряме застосування основного принципу підрахунку в комбінаториці.

Оцінка «Ймовірності успіху» стратегічних планів та мату

У шахах, на відміну від азартних ігор, немає класичної «ймовірності» завершити гру матом, що ґрунтувалася б на випадкових подіях. Мат – це детермінований результат, що досягається послідовністю точних ходів обох гравців. Однак, теорія ймовірностей імпліцитно застосовується для оцінки *перспектив* та *ризиків* певних стратегічних рішень або комбінацій:

- Оцінка успішності атаки та «ймовірність» мату:** коли гравець планує матову атаку, він не може бути на 100% впевнений у її успіху. Він оцінює «ймовірність» того, що його план призведе до мату, ґрунтуючись на комбінаторному аналізі всіх можливих оптимальних або ймовірних відповідей опонента. Чим менше «несподіваних» або сильних контр-відповідей може зробити суперник, тим вищою є «ймовірність успіху» комбінації. Це евристична ймовірність, яка відображає ступінь впевненості гравця, що він зможе довести атаку до кінця, і яка ґрунтується на його здатності прорахувати дерево варіантів.

- «Шанси» на нічию або перемогу у складних ендшпілях:** у складних ендшпілях з обмеженим матеріалом шахісти часто оцінюють свої "шанси" на перемогу або нічию. Ці «шанси» ґрунтуються на комбінаторному перерахунку виграшних, нічийних або програшних варіантів, які можуть виникнути. Наприклад, якщо відомо, що певний ендшпіль при оптимальній грі призводить до нічий, то «ймовірність» перемоги в ньому зводиться до «ймовірності» помилки суперника.

- Оцінка ризику помилки:** кожен хід несе в собі ризик помилки. Гравець оцінює, наскільки «ймовірно» він або його суперник можуть зробити помилку в певній складній позиції, виходячи з їхнього досвіду, цейтноту та комбінаторної складності ситуації. Це суб'єктивна ймовірність, заснована на моделі гравця про його опонента та вроджену складність позиції.

Роль математичного аналізу у розвитку шахового програмного забезпечення

Прогрес у шахових рушіях є свідченням потужності комбінаторних та ймовірнісних моделей (які лежать в основі алгоритмів пошуку та оцінки). Сучасні шахові програми (наприклад, Stockfish, AlphaZero) досягли надзвичайно високого рівня гри завдяки:

- **Масштабному пошуку по дереву:** використовуючи такі алгоритми, як мінімакний пошук з альфа-бета відсіченням, вони досліджують мільярди комбінацій за секунду. Кількість вузлів у такому дереві пошуку може бути величезною, що є комбінаторним вибухом.

- **Функції оцінки позиції:** ці функції присвоюють числовий «бал» кожній позиції (наприклад, від -10 до +10, де +10 може означати майже форсований мат для білих, а -10 для чорних), що представляє «ймовірність» або «перевагу» для однієї зі сторін. Цей бал виводиться з складних розрахунків, що включають цінність фігур, пішакову структуру, безпеку короля та багато інших факторів, по суті, кількісно визначаючи «шанси» на перемогу з цієї позиції.

Висновки

Отже, шахи, незважаючи на відсутність випадкових елементів, є видатним прикладом застосування комбінаторного аналізу та ймовірнісної оцінки у стратегічній грі. Комбінаторика дозволяє нам досягнути величезне різноманіття ігрових ситуацій та розраховувати форсовані варіанти, тоді як ймовірнісні оцінки допомагають гравцям оцінювати ризики, планувати атаки та приймати оптимальні рішення. Це підкреслює універсальність математичних методів та їхню здатність допомагати нам краще розуміти та опановувати навіть такі складні системи, як шахи, демонструючи їхню глибину та науковий підхід.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Shannon C. E. XXII. Programming a computer for playing chess. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1950. Т. 41, № 314. С. 256–275. URL: <https://vision.unipv.it/IA1/ProgrammingaComputerforPlayingChess.pdf> (дата звернення: 23.05.2025).
2. Which is greater? The number of atoms in the universe or the number of chess moves?. *National Museums Liverpool*. URL: <https://www.liverpoolmuseums.org.uk/stories/which-greater-number-of-atoms-universe-or-number-of-chess-moves> (дата звернення: 23.05.2025).
3. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики Частина 1 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б., Хом'юк В. В. – Вінниця : ВНТУ, 2017. –145 с.

Костюк Денис Васильович – студент групи 1ПКТ-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: deniskostuk445@gmail.com

Науковий керівник: **Хом'юк Віктор Вікторович** – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Kostiuk Denis Vasyliovych – student of group 1PKT-24b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: deniskostuk445@gmail.com.

Supervisor: **Khomyuk V. V.** – Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiravvh@gmail.com