

ТЕОРІЯ ПОХИБОК: АБСОЛЮТНА, ВІДНОСНА, СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА ПОХИБКА.

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглядаються основні види похибок: абсолютна похибка, яка визначається як модуль різниці між наближеним і точним значенням; відносна похибка, що нормує це відхилення щодо істинного значення і виражається у відсотках; та середньоквадратична похибка, яка застосовується при обробці результатів серії вимірювань або обчислень. Розуміння цих понять є фундаментальним для чисельного аналізу, апроксимації функцій, вирішення диференціальних рівнянь та оцінки надійності обчислювальних методів. Правильне врахування похибок забезпечує високу достовірність математичних результатів і дозволяє адекватно інтерпретувати отримані дані.

Ключові слова: похибка, абсолютна похибка, відносна похибка, середньоквадратична похибка, істинне значення, наближене значення, точність вимірювання, чисельний аналіз оцінка похибки, обчислювальні методи.

Annotation

This work examines the main types of errors: absolute error, defined as the absolute value of the difference between an approximate and an exact value; relative error, which normalizes this deviation with respect to the true value and is usually expressed as a percentage; and the root mean square error, used in the processing of a series of measurements or computations. Understanding these concepts is fundamental in numerical analysis, functional approximation, solving differential equations, and evaluating the reliability of computational methods. Proper consideration of errors ensures high accuracy of mathematical result and enables adequate interpretation of the obtained data.

Keywords: error, absolute error, relative error, root mean square error, true value, approximate value measurement accuracy, numerical analysis, error estimation, computational methods.

Вступ

У сучасній науці та техніці велика увага приділяється точності обчислень і вимірювань. Будь-яке вимірювання або обчислення супроводжується певною похибкою, яка виникає через обмеженість приладів, наближені методи розрахунків або вплив зовнішніх чинників. Теорія похибок у вищій математиці дає змогу систематизовано підходити до оцінки достовірності числових результатів і дозволяє кількісно аналізувати відхилення між отриманими та істинними знаннями.

Вивчення основних видів похибок – абсолютної, відносної та середньоквадратичної – є важливою частиною підготовки математика, інженера, фізика або будь-якого фахівця, що працює з експериментальними або обчислювальними даними. Ці поняття лежать в основі чисельних методів, моделювання процесів і аналізу точності результатів, тому їх розуміння є необхідним для ефективного застосування математичних знань у практичній діяльності.

Результати дослідження

У прикладній математиці, фізиці, інженерії та чисельних обчисленнях точність результатів завжди обмежена. Вона залежить від багатьох чинників: якості приладів, умов експерименту, точності моделей, обчислювальних методів тощо. Саме тому вища математика розглядає спеціальний розділ – теорію похибок, що дозволяє досліджувати і кількістю описувати відхилення між істинними та наближеними значеннями.

Похибки можуть виникати як при вимірюваннях, так і в процесі чисельного розв'язування задач. Незалежно від джерела їх походження, вони можуть бути класифіковані, проаналізовані та враховані при формуванні висновків.

У ході дослідження були розглянуті основні типи похибок:

Абсолютна похибка – це основна міра точності, що відображає величину відхилення наближеного значення від істинного. Вона визначається так:

$$\Delta x = |x - x_0|$$

де:

- x – наближене значення;
- x_0 – істинне значення;
- Δx – абсолютна похибка.

Абсолютна похибка має ті самі одиниці вимірювання, що й сама величина. Вони є зручною для початкової оцінки, але не завжди показує реальну значущість похибки щодо розміру величини.

Для конкретнішої точності використовується **відносна похибка** яка показує, яку частку становить абсолютна похибка відносно істинного значення. Вона обчислюється за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{|x_0|} \cdot 100\% = \frac{|x - x_0|}{|x_0|} \cdot 100\%$$

Це безрозмірна величина, яка виражається у відсотках і дозволяє порівнювати точність різних обчислень або вимірювань. Особливо актуальна у випадках, коли значення мають різний масштаб.

Коли маємо справу з декількома результатами вимірювань або обчислень для оцінки точності використовують середньоквадратичну похибку. Вона показує ступінь розсіювання значень навколо середнього і розраховується так:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

де:

- x_i – результат вимірювання або обчислень
- $\bar{x}$ – середнє арифметичне
- n – кількість значень
- σ – середньоквадратична похибка

СКП є ключовим показником в обробці статичних даних, чисельному аналізі та при апроксимації функції. Вона дозволяє оцінити надійність результатів і рівень шуму в даних.

Класифікація похибок:

Залежно від характеру та джерела виникнення, похибки поділяють на:

- Систематичні похибки – виникають через вплив постійного чинника (наприклад, калібрування приладу, методичні недоліки). Мають сталий знак і величину.
- Випадкові похибки – зумовлені дією непередбачуваних факторів. Вони мають випадковий характер і можуть змінювати знак.
- Загальні похибки – поєднують обидва типи.

Розуміння природи похибок дозволяє застосувати відповідні методи зменшення їхнього впливу, наприклад усереднення результатів, використання точніших алгоритмів або корекцію приладів.

Значення теорії похибок у вищій математиці

Теорія похибок є фундаментальною основою чисельного аналізу – розділу вищої математики, що займається пошуком наближених розв'язків математичних задач. Оцінка похибки є критично важливою при застосування таких методів, як:

- Чисельне інтегрування, де для формули Сімпсона похибка наближення обчислюється як:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

- Методи розв’язування диференціальних рівнянь (наприклад, метод Ейлера), для яких локальна похибка:

$$\varepsilon_{\text{лок}} = \frac{h^2}{2} y''(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

де:

- h – крок дискретизації
- y'' -- друга похідна аналітичного розв’язку
- Апроксимація функції поліномами або рядами, де похибка наближення визначається залишковим членом:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x)$$

Оцінка таких похибок дозволяє контролювати точність обчислень та гарантувати збіжність чисельних алгоритмів.

Висновки

У ході дослідження було з’ясовано, що теорія похибок є важливою складовою вищої математики, яка дозволяє кількісно оцінювати точність обчислень і вимірювань. Основні типи похибок – абсолютна, відносна та середньоквадратична – виконують різні функції, але разом забезпечують комплексний підхід до аналізу наближених значень.

Абсолютна похибка дає уявлення про модуль відхилення від істинного значення, тоді як відносна дозволяє порівнювати похибки різних за масштабом величин. Середньоквадратична похибка, у свою чергу, є ключовим інструментом статичної обробки результатів і дозволяє оцінити стабільність та надійність обчислень.

Теорія похибок активно застосовується в чисельних методах, статистиці, аналізі похибок моделей і результатів, що робить її незамінним інструментом для точних наук, інженерії та технологій. Вивчення похибок не лише підвищує рівень математичної культури, а й сприяє розробці ефективніших та точніших алгоритмів і методів розв’язання прикладних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз В.Г., Бевз Г.П. Вища математика: підручник. – Київ: ВЦ «Академія». 2020. – 720 с.
2. Кузьменко Н.І., Левчук Л.Т. Чисельні методи: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2019. – 146 с.
3. Burden R.C., Faires J.D. Numerical Analysis. – 10th ed. -- Boston: Cengage Learning, 2016. – 888 p.
4. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineer. – 8th ed. – McGraw-Hill Education, 2020. – 960 p.
5. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics – 10th ed. – Wiley/ 2011. – 1280 p.
6. Тимченко І.І. Теорія ймовірності та математична статистика: навчальний посібник.

Чорний Андрій Леонідович – студент групи 2КІ-24б факультету інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: andrchorniy@gmail.com

Chorny Andriy Leonidovich – student of group 2KI-24b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: andrchorniy@gmail.com