

Основи математичної логіки та множин

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

У дослідженні розглянуто фундаментальні поняття математичної логіки та теорії множин — двох основоположних розділів сучасної математики, що мають широке застосування у комп'ютерних науках. Проаналізовано логічні операції, висловлювання, істинні значення, а також базові поняття множин, операції над ними та їхнє практичне значення у формалізації даних. Показано значення логіки у побудові алгоритмів і прийнятті рішень, а множин — у структурованому представленні інформації.

Ключові слова: математична логіка, висловлювання, логічні операції, теорія множин, булева алгебра, логічні вирази, формальні мови, відношення, перетин, об'єднання, доповнення.

Annotation

This study covers the basic concepts of mathematical logic and set theory – two fundamental disciplines in modern mathematics with broad applications in computer science. It analyzes logical operations, statements, truth values, as well as the essential notions of sets, operations on them, and their practical relevance in data formalization. The role of logic in algorithm development and decision-making is emphasized, as well as the utility of sets in structured information representation.

Keywords: mathematical logic, statements, logical operations, set theory, Boolean algebra, logical expressions, formal languages, relations, intersection, union, complement.

Вступ

Математична логіка та теорія множин є фундаментальними складовими сучасної дискретної математики, які відіграють важливу роль у розвитку інформатики, програмування, штучного інтелекту, теорії обчислень та автоматизації. Вони не лише формують теоретичну основу багатьох алгоритмічних процесів, а й забезпечують інструментарій для формального опису та аналізу логічних структур, операцій над даними та інформаційних моделей. Математична логіка дозволяє формалізувати міркування, здійснювати логічні виведення, конструювати алгоритми прийняття рішень. Вона лежить в основі побудови логічних схем, програмних умов, верифікації програмного забезпечення та моделювання систем штучного інтелекту. Теорія множин, у свою чергу, забезпечує потужний формальний апарат для роботи з колекціями об'єктів, що використовуються у базах даних, мовах програмування та структурованих моделях даних. У цьому дослідженні розглядаються базові поняття математичної логіки та теорії множин, а також приклади їх застосування у сучасних комп'ютерних системах.

Результати дослідження

У ході дослідження з'ясовано, що математична логіка забезпечує формальний підхід до побудови висловлювань, доведення тверджень та перевірки істинності суджень. Основними елементами логіки є:

- **Прості висловлювання**, які мають чітке істиннісне значення (істина або хиба).
- **Складені висловлювання**, які утворюються шляхом застосування логічних операцій:
 - $\neg A$ (заперечення),
 - $A \wedge B$ (кон'юнкція),
 - $A \vee B$ (диз'юнкція),
 - $A \rightarrow B$ (імплікація),
 - $A \leftrightarrow B$ (еквівалентність).

Ці операції мають точне формальне визначення за допомогою таблиць істинності, які дозволяють автоматизовано перевіряти логічні зв'язки. Наприклад, логічні вирази можна спрощувати або перетворювати в канонічну форму, що критично важливо у цифровій схемотехніці й оптимізації алгоритмів.

У теорії множин досліджено:

- **Поняття множини** як колекції об'єктів, наприклад $A=\{1,2,3\}$.
- **Основні операції над множинами:**
 - об'єднання $A\cup B$,
 - перетин $A\cap B$,
 - різниця $A\setminus B$,
 - доповнення.
- **Підмножини, сімейства множин, декартовий добуток та бінарні відношення.**

Дослідження показало, що множини є зручною моделлю для подання структурованих даних у програмуванні, базах даних та логічному програмуванні (наприклад, у мовах Prolog, SQL).

Особливу увагу приділено застосуванню логіки та множин у комп'ютерних науках:

- **У розробці алгоритмів** — через побудову логічних умов та розгалужень.
- **У програмуванні** — при реалізації умовних операторів (if, switch) та булевих виразів.
- **У моделюванні баз даних** — за допомогою множинної алгебри для запитів (SQL: SELECT, JOIN, INTERSECT).
- **У штучному інтелекті** — для створення логічних правил, експертних систем, побудови дедуктивних моделей.
- **У теорії автоматів та формальних мов** — для визначення мов, побудови граматики і автоматів.

Крім того, встановлено, що математична логіка лежить в основі формального доведення правильності програм (верифікації), що є надзвичайно важливим у сфері критичних систем (медицина, авіація, банківські сервіси).

Висновки

У результаті дослідження встановлено, що математична логіка є ключовим інструментом для побудови й аналізу логічних висловлювань, формалізації умов, створення алгоритмів та перевірки їхньої коректності. Логічні операції та таблиці істинності лежать в основі реалізації умовних конструкцій у програмуванні, логічних схем в електроніці, а також у верифікації програм. Теорія множин забезпечує формалізований підхід до представлення й обробки колекцій об'єктів, включаючи операції об'єднання, перетину, різниці та доповнення. Ці операції мають широке застосування у базах даних, мовах програмування та моделюванні структур даних. Обидві дисципліни є фундаментом комп'ютерних наук і критично важливими для розробки програмного забезпечення, логічних моделей, формальних мов і систем штучного інтелекту. Знання математичної логіки та теорії множин є необхідним для ефективної роботи у сфері інформаційних технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1.Євладенко В.М., Халецька З.П., Нарадовий В.В. Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчально-методичний посібник. Кіровоград: Видавництво «КОД», 2009. 116с.
- 2.Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. — CRC Press, 2015. — 513 p.
- 3.Wikipedia: «Mathematical logic», «Set theory» — URL: <https://uk.wikipedia.org>

Кордюков Ярослав Сергійович – студент групи 2КІ-24б факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: yaroslavkordyk@gmail.com

Kordyukov Yaroslav Sergeevich– student of group 2KI-24b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: yaroslavkordyk@gmail.com