

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті розглянуто основні чисельні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними. Описано їхні переваги, недоліки та сфери застосування. Особливу увагу приділено методу Ейлера, методу Рунге-Кутта, а також методу скінченних елементів.

Ключові слова: чисельні методи, розв'язання, диференціальні рівняння.

Abstract

The article considers the main numerical methods for solving ordinary differential equations and partial differential equations. Their advantages, disadvantages and areas of application are described. Particular attention is paid to the Euler method, the Runge-Kutta method, as well as the finite element method.

Keywords: numerical methods, solutions, differential equations.

Вступ

Розв'язування значної більшості прикладних задач в різних галузях промисловості передбачає вирішення ряду проблем, які пов'язані з раціональним вибором параметрів об'єкту, що досліджується або проектується. Це, в свою чергу, визначає актуальність розвитку чисельних методів математичного моделювання. В деяких випадках має місце ситуація, коли існуючі математичні моделі та методи не дозволяють забезпечити ефективного розв'язку задачі з визначеною точністю. Переважна більшість математичних моделей включає до себе системи диференціальних рівнянь (звичайних або з частинними похідними), для яких можливо тільки чисельне розв'язання, як наслідок, виникає похибка розв'язку. Оскільки одержання чисельного розв'язку без оцінки похибки не має сенсу, проблема керованого за точністю чисельного аналізу є актуальною. Слід підкреслити, що критерії точності та ефективності чисельних методів є взаємно суперечливими, тобто покращення одного з критеріїв призводить до погіршення іншого.

Диференціальні рівняння є основним інструментом математичного моделювання процесів у різних галузях науки й техніки. Однак у більшості випадків аналітичне розв'язання таких рівнянь є неможливим через їхню складність. У таких ситуаціях використовують чисельні методи, які дозволяють наближено знаходити розв'язки з необхідною точністю.

Результати дослідження

Сучасне суспільство розпочало важливий період свого розвитку – еру інформатизації. Для вирішення теоретичних і практичних задач, що виникають під час діяльності людини у різних галузях науки, техніки та виробництва з метою мінімізації участі людини, значний ефект отримується саме за рахунок використання обчислювальної техніки при умові надійного програмного забезпечення та вмілого його використання. Тому такі дисципліни як «Методи обчислень» та «Чисельні методи» набувають особливо великого значення.

Сучасний розвиток науки та обчислювальної техніки характеризується все більш зростаючим рівнем використання комп'ютерних моделей як для дослідження поведінки явищ та процесів, що оточують людину, так і для розв'язування практичних задач, що пов'язані з управлінням та прогнозуванням [1]. Поглиблене вивчення дисципліни «Чисельні методи» дозволяє майбутньому інженеру оволодіти знаннями в галузі практичних методів вирішення математичних проблем, що виникають у процесі інженерної діяльності та моделювання фізичних систем.

Насправді нині існує велика кількість чисельних методів обчислення диференціальних рівнянь. У сучасних підручниках описується близько 10-13 різних методів, кожен із яких має свої переваги та недоліки і відповідні сфери застосування.

Чисельні методи – методи наближеного або точного розв’язування задач прикладної математики, які ґрунтуються на побудові послідовності дій над скінченною множиною чисел [4]. Яскравим прикладом застосування чисельних методів є опрацювання статистичних даних, де досить велика вибірка самих даних, відповідно обсяг обчислень може виявитися дуже великим. Чисельні методи націлені на скорочення кількості обчислень при збереженні якості результатів.

Чисельні методи використовувалися ще за часів Ньютона (1642-1727рр.) для розв’язування задач з астрономії, геодезії та обчислення механічних конструкцій. На той час обчислення з використанням чисельних методів виконувалися з доволі високою точністю (до восьми знаків після коми). Наприклад, французький математик і астроном Урбен Левер’є (1811-1878 рр.), уточнюючи траєкторію руху планети Уран, виявив відхилення від обчисленої траєкторії. Він припустив, що ці відхилення спричиняє інша планета, яка до того не спостерігалась астрономами. Використовуючи чисельні методи, він за півроку обчислив масу і орбіту невідомої планети, що справляє дію на Уран і виводить планету із рівноваги [4].

Сучасні спеціалісти галузі інженерії часто зіштовхуються з диференціальними рівняннями та системами диференціальних рівнянь при розробці нових виробів чи технологічних процесів, так як більша частина законів фізики формалізується саме у вигляді диференціальних рівнянь. Будь-яка задача проектування, яка пов’язана з розрахунком потоків енергії чи руху тіл, в кінцевому результаті зводиться до розв’язку диференціальних рівнянь. Нажаль, лише дуже малу частину з них можливо вирішити без використання обчислювальних машин. Тому чисельні методи розв’язку диференціальних рівнянь відіграють важливу роль у практиці інженерних розрахунків [1].

Розглянемо найпопулярніші чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь.

1. Метод Ейлера.

Найчастіше немає можливості знайти аналітичний розв’язок систем диференціальних рівнянь, тому використовують так звані чисельні методи. Чисельні методи базуються на знаходженні значень, що є найбільш близькими до розв’язків систем диференціальних рівнянь. Метод Ейлера — це один із найпростіших чисельних методів для розв’язання звичайних диференціальних рівнянь. Він заснований на апроксимації кривої розв’язку лінійними сегментами та є методом першого порядку точності [2].

Розглянемо задачу Коші:

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Метод Ейлера замінює диференціальне рівняння на скінченну різницю. Для обчислення значення функції y_{n+1} у точці $x_{n+1} = x_n + h$ використовують наступну формулу:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad (2)$$

де h – крок інтегрування,

$f(x_n, y_n)$ – значення похідної в точці (x_n, y_n) .

Алгоритм:

1. Задати початкові значення x_0, y_0 і крок h .

2. Рекурентно обчислювати y_{n+1} за формулою:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n). \quad (3)$$

3. Повторювати кроки обчислення, поки не буде досягнуто потрібне значення x_k .

Приклад: Розв’яжемо рівняння:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1,$$

на відрізку $x \in [0, 1]$ із кроком $h = 0.1$.

Крок 1:

Початкові значення: $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Крок 2:

Рекурентні обчислення:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1. \\ y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.22. \end{aligned}$$

І так далі.

Переваги даного методу полягають у тому, що присутня простота реалізації та низькі обчислювальні вимоги. Також є можливість використання для широкого класу задач.

Недоліки даного методу полягають у низькій точності для великих кроків h , й крім того є нестійкість для жорстких задач [3].

2. Метод Рунге-Кутта.

Методи Рунге-Кутта важлива група чисельних методів розв'язування (систем) звичайних диференціальних рівнянь. Названі на честь німецьких математиків Карла Рунге і Мартіна Кутта, які відкрили ці методи.

Методи Рунге-Кутті – це клас чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнів, які забезпечують високу точність розрахунків. Найбільш популярним є метод Рунге-Кутті четвертого порядку (RK4) [3], який часто використовується за допомогою збалансованості між точністю та обчислювальною складністю.

Основною ідеєю є те, що методи Рунге-Кутта узагальнюють метод Ейлера шляхом врахування кількох додаткових оцінок похідної на кожному кроці, що дозволяє підвищити точність обчислень.

Розглянемо задачу Коші:

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Метод четвертого порядку обчислює значення y_{n+1} за формулою:

$$y_{n+1} = y_n + (h/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5)$$

де:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + h/2 \cdot k_1), \\ k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + h/2 \cdot k_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h \cdot k_3). \end{aligned}$$

Покроковий детальний алгоритм виглядає так: задати початкові умови x_0, y_0 і крок h ; обчислити k_1, k_2, k_3, k_4 за наведеними формулами; використати формулу для обчислення y_{n+1} ; повторювати, поки x_n не досягне кінцевого значення [2].

Переваги методу Рунге-Кутта: висока точність – метод четвертого порядку забезпечує високу точність при відносно невеликих значеннях кроку (h). Стабільність – метод є стійким для багатьох типів задач. Простота реалізації – легко реалізується програмно.

Основні недоліки полягають у тому, що метод має обчислювальні витрати – метод вимагає виконання чотирьох оцінок функції (f) на кожному кроці, а також є обмеження на крок – при великих значеннях (h) точність може знижуватися, що може вимагати зменшення кроку для досягнення прийнятної точності.

Отже, враховуючи вищезазначене методи Рунге-Кутта, зокрема RK4, є потужними інструментами для чисельного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Вибір конкретного методу та розміру кроку залежить від специфіки задачі, яку потрібно розв'язати.

3. Метод скінченних елементів.

Метод скінченних елементів – чисельний метод розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь. Він широко використовується в інженерії та фізиці, особливо для аналізу механіки конструкцій, теплопередачі, динаміки рідин тощо.

Основна ідея даного методу полягає в розбитті області на підобласті (скінченні елементи), де шуканий розв'язок апроксимується функціями (найчастіше поліномами). Після цього рівняння перетворюються у систему алгебраїчних рівнянь [2].

Алгоритм даного методу:

1. Розбиття області на елементи: область поділяється на прості геометричні фігури.
2. Апроксимація: в межах кожного елемента шуканий розв'язок апроксимується базисними функціями.
3. Формулювання рівнянь: формуються локальні рівняння за методом Галеркіна.
4. Збір глобальної системи: локальні рівняння об'єднуються у глобальну систему.
5. Розв'язання системи: отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язується чисельними методами [4].

Як і усі попередні даний метод має свої переваги та недоліки. Основні переваги: універсальність: підходить для задач складної геометрії; висока точність для нелінійних задач. Недоліки: значні обчислювальні витрати для великих задач; цей метод вимагає складного попереднього етапу розбиття області на елементи.

Приклади застосування даного методу у житті: фізика – розрахунок траєкторії руху тіл у силових полях; інженерія – моделювання напружено-деформованого стану конструкцій; біологія – моделювання росту популяцій із використанням рівнянь Лотки-Вольтерри.

Висновки

Отже, слід зазначити, що чисельні методи є невід’ємною частиною сучасної математики й наукових досліджень. Вибір методу залежить від особливостей задачі, необхідного рівня точності та наявних обчислювальних ресурсів. Метод Ейлера є базовим чисельним методом розв’язання диференціальних рівнянь. Простота реалізації робить його корисним для початкового ознайомлення з чисельними методами. Основним недоліком є низька точність і необхідність малих кроків для збереження стабільності. Метод Рунге-Кутти: відзначається високою точністю за рахунок використання кількох проміжних оцінок похідної. Метод четвертого порядку є найбільш популярним через баланс між точністю та обчислювальними затратами. Придатний для задач з помірною жорсткістю, але вимагає більше обчислень, ніж метод Ейлера. Метод скінченних елементів – універсальний метод для розв’язання крайових задач з частинними диференціальними рівняннями. Підходить для задач зі складною геометрією та нелінійними залежностями. Недоліками є значна обчислювальна складність та необхідність розбиття області на елементи.

Загалом, метод Рунге-Кутти та Метод скінченних елементів є фундаментальними інструментами сучасної обчислювальної математики та широко використовуються в інженерії, фізиці та прикладних науках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. Чисельні методи в комп’ютерних науках: навчальний посібник, Том 2 за ред. В.В. Пасічника – Львів: Видавництво «Новий Світ – 2000», 2020. – 536 с.
2. Костюшко І.А., Любашенко Н.Д., Третинник В.В. Методи обчислень: підручник. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2021. – 243 с
3. Масленников, С. Ю. Основи чисельного моделювання диференціальних рівнянь. — Харків: ХНУ ім. Каразіна, 2017.
4. Числові методи. Вікіпедія – вільна енциклопедія. URL : <https://uk.wikipedia.org>

Боровик Антон Павлович – студент групи 1ПО-24Б факультету інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: tosha.borovik91@gmail.com

Хом’юк Віктор Вікторович – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Borovyk Anton – student of group 1PO-24B Faculty of information Technology and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: tosha.borovik91@gmail.com

Khomyuk V. V. – Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiravvh@gmail.com