

Я. А. Косенко
О. С. Стецюра
М. Б. Ковальчук

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді розглядається фундаментальна роль лінійної алгебри в сучасній комп'ютерній графіці. Аналізуються основні концепції лінійної алгебри, такі як вектори, матриці та системи лінійних рівнянь, та їх практичне застосування для представлення, трансформації та маніпулювання 2D та 3D об'єктами. Описано використання матричних перетворень для масштабування, обертання, переміщення та проектування графічних об'єктів. Підкреслено важливість лінійної алгебри для створення реалістичних візуалізацій, анімації та інтерактивних графічних застосунків.

Ключові слова: лінійна алгебра, комп'ютерна графіка, вектори, матриці, афінні перетворення, 2D графіка, 3D графіка, проекції.

Abstract

The report examines the fundamental role of linear algebra in modern computer graphics. It analyzes the core concepts of linear algebra, such as vectors, matrices, and systems of linear equations, and their practical application for representing, transforming, and manipulating 2D and 3D objects. The use of matrix transformations for scaling, rotation, translation, and projection of graphical objects is described. The importance of linear algebra for creating realistic visualizations, animation, and interactive graphical applications is emphasized.

Keywords: linear algebra, computer graphics, vectors, matrices, affine transformations, 2D graphics, 3D graphics, projections.

Вступ

Сучасна комп'ютерна графіка, що лежить в основі відеоігор, спецефектів у кіно, систем автоматизованого проектування (САПР), віртуальної та доповненої реальності, неможлива без потужного математичного апарату. Однією з ключових галузей математики, що забезпечує теоретичну та практичну базу для комп'ютерної графіки, є лінійна алгебра. Розуміння її принципів дозволяє ефективно описувати геометричні об'єкти, виконувати над ними різноманітні перетворення та отримувати реалістичні зображення на екрані. Метою даної доповіді є розгляд основних аспектів застосування лінійної алгебри в комп'ютерній графіці та демонстрація її ключової ролі у цій галузі.

Результати дослідження

1. Базові поняття лінійної алгебри в контексті комп'ютерної графіки. Комп'ютерна графіка оперує геометричними об'єктами, положення та форма яких зручно описуються засобами лінійної алгебри. Вектори є фундаментальними елементами для визначення точок у просторі, напрямків, а також для представлення атрибутів, як-от колір. Операції з векторами мають чітку геометричну інтерпретацію і широко використовуються для маніпуляції об'єктами. Матриці ж виступають потужним інструментом

для опису та застосування геометричних перетворень, дозволяючи компактно представити операції обертання, масштабування, переміщення та ефективно їх комбінувати. Хоча й менш очевидно, системи лінійних рівнянь також знаходять своє застосування, наприклад, при розрахунку перетинів променів з об'єктами, інтерполяції значень або в деяких алгоритмах освітлення. [4]

2. Афінні перетворення в 2D та 3D графіці. Афінні перетворення є ключовими для анімації та моделювання, дозволяючи змінювати положення, розмір та орієнтацію об'єктів, зберігаючи їхню загальну форму. До основних афінних перетворень належать переміщення – зміна положення об'єкта в просторі без зміни його розміру чи орієнтації; масштабування – зміна розмірів об'єкта вздовж однієї або декількох координатних осей; та обертання – поворот об'єкта навколо певної точки (у 2D) або осі (у 3D) на заданий кут. Усі ці операції математично реалізуються за допомогою відповідних матриць. Важливою перевагою є можливість композиції перетворень: кілька послідовних трансформацій можна об'єднати в одну загальну матрицю шляхом їх перемноження, що значно оптимізує обчислення, при цьому порядок множення матриць має значення.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Проектування об'єктів. Для відображення тривимірної сцени на двовимірному екрані використовується операція проектування. Існує два основні типи: ортографічна проекція, де паралельні промені проектують об'єкт на площину, зберігаючи відносні розміри, але не створюючи відчуття глибини, що часто використовується в інженерних кресленнях; та перспективна проекція, яка імітує людське сприйняття, де віддаленіші об'єкти виглядають меншими, створюючи відчуття глибини та реалізму. [5] Обидва типи проекцій також реалізуються за допомогою матричних перетворень.

4. Застосування в освітленні та текстурованні. Лінійна алгебра відіграє важливу роль і в більш складних аспектах комп'ютерної графіки. Наприклад, моделі освітлення, що розраховують взаємодію світла з поверхнями об'єктів (яскравість, відблиски, тіні), часто базуються на векторних операціях, таких як скалярний добуток для визначення кута падіння світла. Текстуровання, тобто процес накладання двовимірних зображень на поверхні тривимірних об'єктів, також використовує трансформації для коректного розташування текстури на моделі.[3]

$$I_d = k_d \cdot I_l \cdot (\vec{N} \cdot \vec{L})$$

5. Роль лінійної алгебри в сучасних графічних API та рушіях. Сучасні інструменти для розробки графічних застосунків, такі як графічні бібліотеки (OpenGL, DirectX, Vulkan) та ігрові рушії (Unreal Engine, Unity), мають вбудовану підтримку операцій лінійної алгебри. Вони надають програмістам готові функції для роботи з векторами та матрицями, значно спрощуючи процес розробки.

6. Інтерполяція та апроксимація для створення плавних форм та рухів. Лінійна алгебра є основою для методів інтерполяції та апроксимації, які широко застосовуються в комп'ютерній графіці. Наприклад, для створення плавних кривих (таких як криві Безьє або сплайни), що використовуються для моделювання контурів об'єктів, траєкторій руху в анімації або для визначення шляху камери.[1][2] Лінійна інтерполяція (лерп) часто використовується для плавного переходу між двома станами (наприклад, кольорами, позиціями, кутами повороту) в анімації. Для більш складних задач, таких як побудова гладких поверхонь через набір контрольних точок, використовуються складніші методи, що спираються на розв'язання систем лінійних рівнянь.

7. Скелетна анімація, кватерніони та деформації об'єктів. У 3D-анімації персонажів широко використовується скелетна анімація, де рух моделі визначається "кістками" віртуального скелета.[3] Положення та орієнтація кожної кістки задаються матрицями трансформації, а вершини "шкіри" моделі прив'язуються до цих кісток з певними ваговими коефіцієнтами. Лінійна алгебра тут забезпечує

математичну базу для обчислення кінцевих позицій вершин при русі скелета. Для представлення обертань, особливо в анімації, часто використовуються кватерніони.[1][4][5] Це розширення комплексних чисел, яке дозволяє уникнути деяких проблем, пов'язаних з матрицями обертання (наприклад, "блокування обертання" – gimbal lock) та забезпечує більш ефективну інтерполяцію між різними орієнтаціями. Також лінійна алгебра є ключовою для реалізації деформацій об'єктів, наприклад, при моделюванні тканин, м'яких тіл або при застосуванні різних ефектів зміни форми.[3]

Висновки

Лінійна алгебра є невід'ємною математичною основою комп'ютерної графіки. Вона надає ефективні та універсальні інструменти для представлення геометричних об'єктів, їх перетворення та візуалізації. Розуміння векторів, матриць та операцій над ними дозволяє створювати складні та реалістичні графічні сцени, від простої 2D-анімації до вражаючих 3D-світів у відеоіграх та кіно. Глибокі знання в цій галузі є ключовими для фахівців, що працюють у сфері комп'ютерної графіки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонов В. М., Семьонов А. Г. Лінійна алгебра: Навчальний посібник. - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. - 250 с.
2. Фолей Дж. Д., Ван Дам А., Фейнер С. К., Хьюз Дж. Ф. Computer Graphics: Principles and Practice. - Reading: Addison-Wesley, 1995. - 1174 с.
3. Шелтс М. Лінійна алгебра. Вступний курс / пер. з англ. - К.: Видавнича група BNV, 2020. - 448 с.
4. Стренг Г. Introduction to Linear Algebra. - Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 2016. - 600 с.
5. Лендшел Е. Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics. - Boston: Cengage Learning, 2012. - 648 с.

Косенко Ярослав Анатолійович — студент групи 3КН-24б, Факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: aroslavbezdonata@gmail.com

Стецюра Олександр Сергійович — студент групи 3КН-24б, Факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: a4473579@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Kosenko Yaroslav A. — student of group 3KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, aroslavbezdonata@gmail.com

Stetsiura Oleksandr S. — student of group 3KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, a4473579@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95 e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com