

ЕВОЛЮЦІЯ ПРИНЦИПУ НАЙМЕНШОЇ ДІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРЕТИЧНІЙ ТА ПРИКЛАДНІЙ ФІЗИЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Розглянуто застосування принципу найменшої дії в різних галузях фізики, зокрема в механіці, оптиці, термодинаміці, електродинаміці та електротехніці. Проаналізовано історичний розвиток цього принципу, його математичне формулювання та варіаційні методи, що лежать в основі сучасних фізичних теорій.

Ключові слова: *принцип найменшої дії, принцип Гамільтона-Остроградського, інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського.*

Abstract

The application of the principle of least action in various fields of physics, including mechanics, optics, thermodynamics, electrodynamics, and electrical engineering, is examined. The historical development of this principle, its mathematical formulation, and the variational methods underlying modern physical theories are analyzed.

Keywords: *principle of least action, Hamilton-Ostrogradsky principle, integral variational principle of Hamilton-Ostrogradsky.*

Вступ

Принцип найменшої дії (ПНД), будучи простим правилом, записаним однією формулою, розглядається як найкомпактніше формулювання фундаментальних законів природи. Саме застосовуючи ПНД можна математично виразити та пояснити низку основних законів фізики, зокрема класичної механіки, оптики, електродинаміки, термодинаміки, а також квантової механіки та теорії поля. Крім того, ПНД часто застосовується для розв'язування широкого спектру інженерних задач оптимального керування.

Основна частина

ПНД — це фізичний закон, який було сформульовано, обґрунтовано і розвинуто протягом XVI-XIX ст. рядом вчених під час розв'язання певного класу задач геометричної оптики та аналітичної механіки. Одночасно, для розробки загального підходу до розв'язання таких задач було сформовано варіаційне числення — напрям у функціональному аналізі, що використовує метод варіації для знаходження рішень задач на пошук екстремумів інтегралів.

Варто зазначити, що принцип найменшої дії має декілька інших найменувань: принцип стаціонарної дії, перша головна функція Гамільтона, принцип Гамільтона, принцип Гамільтона-Остроградського. Це зумовлено тим, що в різні історичні періоди та в різних наукових школах ПНД отримував різні назви, залежно від акцентів на певних аспектах його застосування та від того, які вчені формулювали ці аспекти [1].

Важливим етапом у поширенні та популяризації ПНД стала публікація Жозефом-Луї Лагранжем у 1788 році праці “Mecanique analytique”, де, спираючись на принцип найменшої дії, він запропонував альтернативне формулювання класичної механіки. В сучасній науці воно називається лагранжевий формалізм або лагранжева механіка. Таке формулювання дало змогу застосувати потужні математичні методи для розв'язання численних специфічних задач ньютонівської механіки, оскільки

лагранжева механіка оперує енергіями, які є скалярами на відміну від ньютонівської механіки, яка базується на векторних силах і імпульсі.

Основною величиною в лагранжевій механіці є лагранжіан — функція, яка являє собою різницю між кінетичною та потенціальною енергіями системи.

$$L = W_K - W_P, \quad (1)$$

де L - лагранжіан, W_K - кінетична енергія, W_P - потенціальна енергія.

Оскільки потенціальна енергія залежить від положення тіла, а кінетична — від його швидкості, функція Лагранжа є функцією узагальнених координат $q_i(t)$, узагальнених швидкостей $q_i'(t)$ та часу t . Вона може бути записана в наступній формі

$$L(q_i(t), q_i'(t), t), \quad (2)$$

де $i = 1, 2 \dots n$ — число ступенів свободи механічної системи.

Відповідно до принципу найменшої дії, із усіх можливих шляхів, якими система може рухатися в конфігураційному просторі між заданими моментами часу t_1 і t_2 , фактично здійснюється той, для якого функціонал S , відомий як дія, набуває стаціонарного (переважно мінімального) значення.

Отже, S є функціоналом, що залежить від i функціональних змінних $q_i(t)$ [2]

$$S[q_1(t), q_2(t) \dots q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), q_i'(t), t) dt \quad (3)$$

Виконавши обчислення варіації для дії S , можна встановити умови, при яких варіація дії δS дорівнює нулю, що дає можливість визначити фактичну траєкторію системи. Адже тільки при $\delta S = 0$ функціонал S буде мати найменше значення, в порівнянні з іншими траєкторіями.

На Рисунку 1 суцільною лінією зображена траєкторія, що відповідає цій умові і називається „прямий шлях”. Усі інші траєкторії, позначені штриховими лініями, не задовольняють цій умові і називаються „обхідними”.

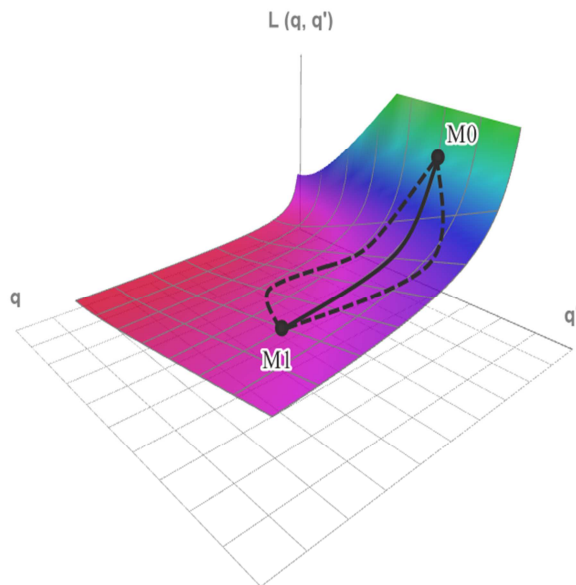


Рисунок 1 — Можливі траєкторії руху системи з точки M0 в точку M1

Умова $\delta S = 0$ також називається принципом Гамільтона, а функціонал S — дією за Гамільтоном, на честь В. Гамільтона, який сформулював цей принцип для консервативних систем. Даний принцип також називають принципом Гамільтона-Остроградського, оскільки для загального випадку цей принцип було сформульовано та обґрунтовано М.В. Остроградським.

Стаціонарність функціонала S , знайдена методами варіаційного числення, досягається тоді й лише тоді, коли виконується диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа [3]. У випадку системи з одним ступенем свободи це рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} = 0 \quad (4)$$

Дане рівняння лежить в основі класичної та аналітичної механіки й знаходить широке застосування в різних розділах фізики, зокрема в оптиці, електродинаміці, квантовій і релятивістській механіці, а також у теорії поля. Крім того, принцип найменшої дії (ПНД) активно застосовується в прикладних науках, зокрема в електротехніці та енергетиці.

Для класичної механіки рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд, еквівалентний рівнянням Ньютона, проте його запис має більш загальну форму. Це дозволяє зручно описувати динаміку систем через узагальнені координати, а сили визначати як градієнт потенціалу, що робить метод особливо ефективним для складних механічних систем.

Рівняння ПНД також можуть бути отримані для опису руху частинок в контексті релятивістської механіки. Зокрема, відповідна функція дії S дозволяє сформулювати повну теорію релятивістського руху окремої частинки в електромагнітному полі, враховуючи релятивістські ефекти [4].

Електростатика вивчає постійні електричні поля, які можна описати скалярним потенціалом, а також заряджені частинки, які рухаються досить повільно і підкоряються ньютонівській механіці. Проваріювавши дію з лагранжіаном що включає в себе кінетичну енергію повільного руху заряджених частинок, енергію взаємодії поля із зарядженою речовиною та енергію поля можна отримати рівняння поля для електростатики (рівняння Пуассона).

У геометричній оптиці принцип Ферма, який теж належить до екстремальних стверджує, що світло поширюється із однієї точки середовища в іншу по шляху, для проходження якого витрачається найменше часу. Виходячи з принципу Ферма, можна вивести всі закони геометричної оптики: закон прямолінійного поширення світла, закон відбивання світла та закон заломлення світла.

Термодинаміка також може бути побудована на основі екстремального принципу максимізації ентропії, який вказує на те, що система прагне до стану, при якому її ентропія досягає максимального значення при заданих умовах. Цей принцип лежить в основі другого закону термодинаміки та дозволяє пояснити, чому природні процеси, такі як теплообмін або розширення газів, відбуваються в напрямку зростання загальної ентропії системи.

У квантовій механіці та теорії поля принцип найменшої дії відіграє фундаментальну роль, формуючи основу інтегралів вздовж траєкторій. У цьому підході еволюція квантової системи розглядається як суперпозиція всіх можливих траєкторій, де найбільший внесок у ймовірність переходу дають ті, що екстремалізують дію. У квантовій теорії поля ПНД формулюється через принцип стаціонарної дії, який використовується для виведення рівнянь руху полів, таких як рівняння Клейна-Гордона або рівняння Дірака [3].

Значним кроком у напрямі прикладного використання принципу найменшої дії в електротехніці стало створення електромеханічної аналогії та обґрунтування можливості застосування рівнянь аналітичної механіки для опису електричних кіл. Було встановлено, що диференціальні рівняння, які характеризують поведінку паралельних і послідовних RLC-коливальних контурів, мають структуру, подібну до рівнянь, що описують механічні коливальні системи.

Окрім цього, доведено, що на основі принципу найменшої дії можна вивести перший і другий закони Кірхгофа, а також показано, що оптимальний розподіл навантаження між електростанціями енергосистеми може бути змодельований із використанням цього принципу [5].

Висновки

Аналіз показує, що принцип найменшої дії є універсальним законом природи, сформованим у період з XVI до XIX століття, який ліг в основу розвитку варіаційного числення. Він знайшов широке застосування в різних галузях фізики, зокрема в механіці, оптиці, термодинаміці, електродинаміці та електротехніці.

Отже, ПНД виступає фундаментальним варіаційним принципом, який забезпечує узагальнений підхід до опису багатьох фізичних процесів і явищ, а також відкриває широкі можливості для використання в прикладних науках, особливо в електротехніці та енергетиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лежнюк П. Д. Принцип найменшої дії в електротехніці та електроенергетиці : монографія / П.Д. Лежнюк, В.В. Кулик, В.В. Нетребський, В.В. Тептя. - Вінниця : ВНТУ, 2014. - 211 с.
2. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник / Перестюк Микола Олексійович. – Київ : КНУ імені Тараса Шевченка, 2010. - 121 с.
3. Cline D., Variational Principles in Classical Mechanics / Douglas Cline. – Rochester : University of Rochester River Campus Libraries, 2017. – 587 p.
4. Coopersmith J. The Lazy Universe. An introduction to the principle of least action / Jennifer Coopersmith. - Oxford : Oxford University Press, 2017. - 280 p.
5. Лежнюк П.Д., Нагул В.І., Нетребський В.В. Принцип найменшої дії в задачах технічної електродинаміки /П.Д. Лежнюк, В.І. Нагул, В.В. Нетребський // Оптична і квантова електроніка в комп'ютерних та інтелектуальних технологіях. 2010. - С. 110-118.

Залізник Максим Пилипович - аспірант кафедри електричних станцій та систем, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: mzaliznyak2013@gmail.com

Нетребський Володимир Васильович - кандидат технічних наук, доцент, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: netrebskiy@ukr.net.

Таранюк Ярослав Сергійович - асистент, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vinyar155@gmail.com.

Maksym ZALIZNYAK – PhD student at the Department of Electrical Power Stations and Systems, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: mzaliznyak2013@gmail.com.

Volodymyr NETREBSKYI – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: netrebskiy@ukr.net.

Yaroslav TARANIUK – assistant, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vinyar155@gmail.com.