

# ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

Розглянуто паралельні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь, їх основні концепції та ефективність у порівнянні з послідовними алгоритмами. Проаналізовано математичні моделі та алгоритми, що використовуються для розпаралелювання обчислень. Особливу увагу приділено реалізації методів Ньютона, релаксаційних та ітераційних підходів у паралельних обчислювальних середовищах. Досліджено вплив паралельних обчислень на швидкість та масштабованість алгоритмів, враховуючи використання багатопотокової та багатопроцесорної архітектур. Проведено аналіз продуктивності та масштабованості обраних методів, досліджено можливості їх оптимізації.

**Ключові слова:** паралельні обчислення, нелінійні рівняння, метод Ньютона, ітераційні методи, розпаралелювання.

## Abstract

Parallel methods for solving systems of nonlinear equations are considered, their basic concepts and efficiency in comparison with sequential algorithms. Mathematical models and algorithms used for parallelizing calculations are analyzed. Particular attention is paid to the implementation of Newton's methods, relaxation and iterative approaches in parallel computing environments. The impact of parallel computing on the speed and scalability of algorithms is studied, taking into account the use of multi-threaded and multi-processor architectures. The performance and scalability of the selected methods are analyzed, and the possibilities of their optimization are investigated.

**Keywords:** parallel computing, nonlinear equations, Newton's method, iterative methods, parallelization.

## Вступ

Системи нелінійних рівнянь використовуються в багатьох галузях науки та техніки, включаючи фізику, хімію, економіку та машинне навчання. Однак їх розв'язання є складною обчислювальною задачею, особливо коли йдеться про великі системи з багатьма змінними. Використання традиційних послідовних алгоритмів може бути вкрай неефективним, оскільки потребує значних обчислювальних ресурсів та часу [1]. З розвитком високопродуктивних обчислювальних систем виникла можливість використовувати паралельні методи для прискорення розрахунків. Важливими аспектами при цьому є вибір ефективних алгоритмів, що добре масштабується на багатоядерних процесорах і обчислювальних кластерах, а також врахування факторів, що впливають на продуктивність, таких як: синхронізація потоків, витрати на передачу даних між процесами тощо.

## Постановка задачі дослідження

Метою дослідження є розробка та аналіз паралельних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь, аналіз їх ефективності та оцінка продуктивності програмної реалізації. Основні завдання дослідження включають [2-5]:

- аналіз існуючих методів розв'язання систем нелінійних рівнянь, їх переваг та недоліків;
- визначення алгоритмів, що ефективно піддаються розпаралелюванню, та критеріїв їх вибору;
- розробка та програмна реалізація паралельних алгоритмів для різних підходів розв'язання;
- проведення тестування та аналіз продуктивності розроблених методів на різних обчислювальних платформах;
- порівняння ефективності паралельних і послідовних підходів на основі практичних експериментів;

- оцінка масштабованості алгоритмів на багатоядерних процесорах, обчислювальних кластерах та розподілених системах.

### **Виклад основного матеріалу**

Виявлення та аналіз підходів до розв'язання систем нелінійних рівнянь [1, 2].

*Прямі методи розв'язання систем нелінійних рівнянь* зазвичай використовуються для малих і середніх розмірів задач. Основна їх особливість - це перехід від початкових рівнянь до лінійних чи квадратичних за допомогою точних алгоритмів. Проте їх основна проблема полягає в необхідності виконувати велику кількість операцій при розв'язуванні великих систем. В цьому контексті паралельні методи дають змогу значно прискорити процес розв'язання.

*Ітераційні методи* дозволяють отримати наближене рішення для складних задач, де застосування прямих методів є малоефективним або непридатним. Ітераційні методи можуть бути особливо корисними для великих, розріджених систем, що дозволяє знизити час обчислень. Але для досягнення високої точності ітераційні методи можуть вимагати значної кількості кроків.

*Паралельний метод Ньютона* є одним із найпоширеніших та ефективних ітераційних методів для розв'язання систем нелінійних рівнянь. Він включає обчислення похідних, що дозволяє швидко наближатися до розв'язку. Для прискорення роботи методу Ньютона застосовують розпаралелювання. Паралельне виконання обчислень для часткових похідних та матричних операцій значно зменшує час обробки. Наприклад, у випадку обчислення зворотної матриці або вирішення лінійної системи рівнянь для кожного кроку методу можна застосувати багатопоточність для розподілу навантаження на різні процесори.

*Метод Гауса-Зейделя* використовують для розв'язання лінійних систем, де кожне обчислення залежить від попереднього. Цей метод зазвичай використовується для систем, що мають розріджену структуру. Ітерації цього методу добре піддаються паралелізації, оскільки після обчислення кожного елемента результат залежить лише від попередніх елементів. У контексті паралельного обчислення для кожного з етапів цього методу можна розпаралелювати обчислення для кожного рядка чи стовпця, що забезпечує суттєве зменшення часу на обчислення.

*Метод релаксації* є ефективним інструментом для стабілізації процесу збіжності в ітераційних методах розв'язання нелінійних рівнянь. Це особливо важливо, коли система має складну нелінійну структуру, де базові методи не можуть гарантувати стабільність. Метод релаксації забезпечує поступове наближення до розв'язку через спеціальні коригування, що дозволяють покращити збіжність методу в умовах нестабільності.

*Гібридні методи* є комбінацією локальних ітераційних процесів та глобальних коригувальних кроків. Вони дозволяють досягти високої ефективності та швидкості збіжності, поєднуючи переваги різних методів. Наприклад, комбінування методу Ньютона з методом Гауса-Зейделя або релаксації дозволяє прискорити процес розв'язання за рахунок використання різних стратегій в залежності від типу задачі.

### **Результати дослідження.**

*Тестування* проводилося на системах різної складності, від простих лінійних систем до складних нелінійних задач. Реалізація алгоритмів паралельних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь виконана з використанням технологій MPI та OpenMP [6]. Результати тестування показали, що використання паралельних методів значно зменшує час розв'язання задачі, особливо на великих даних (табл.1). Паралелізація обчислень для методів Ньютона та Гауса-Зейделя дозволяє суттєво покращити продуктивність, у порівнянні з одиночними потоками. Загальна ефективність методів залежала від кількості процесорів та організації паралелізму, зокрема від правильного розподілу навантаження між потоками.

Аналіз продуктивності показав, що паралельний метод Ньютона забезпечує до 5-кратного прискорення порівняно з послідовним виконанням на чотирьох потоках. Ітераційні методи показали меншу, але стабільну ефективність, особливо на великих системах рівнянь. Зменшення часу

розрахунків досягається за рахунок розподілу обчислень між потоками, однак виникають проблеми синхронізації та комунікації між процесами.

Таблиця 1. - Результати тестування

Метод	Прискорення (в рази)	Ефективність на великих системах
Метод Ньютона	4-5	Висока
Метод Гауса-Зейделя	2-3	Помірна
Метод релаксації	1.5-2	Стабільна, але повільна
Гібридні методи	3-4	Залежить від конфігурації

### Висновки

Паралельні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь дозволяють значно скоротити обчислювальні витрати, проте ефективність їх використання залежить від архітектури системи та особливостей алгоритму. Подальші дослідження можуть бути зосереджені на адаптивних методах розпаралелювання та оптимізації комунікаційних витрат у багатопотокових обчисленнях.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Горячев С.А. Методи розв'язання систем нелінійних рівнянь: математичні основи та алгоритми. Харків: ХНУ, 2020. 312 с.
2. Karpinski M., Zienkiewicz M. Parallel Methods for Nonlinear Systems. Springer, 2021. 330 p.
3. Васильєв Ю.М. Теорія та практика паралельних обчислень. Дніпро: ДНУ, 2021. 264 с.
4. Джеймс С. Паралельне програмування: принципи та техніки. Нью-Йорк: Wiley, 2018. 498 с.
5. Деркач В.І., Павленко С.О. Паралельні обчислення: теорія та практика. К.: Наукова думка, 2019. 256 с.
6. Асташов В.Я., Тарасенко І.В. Паралельне програмування на основі MPI та OpenMP. Київ: Либідь, 2017. 208 с

**Обертинський Андрій Миколайович** – студент кафедри комп'ютерних наук, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: obertynskiya@gmail.com;

**Денисюк Валерій Олександрович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: vad64@i.ua.

**Obertynskiy Andriy Mykolayovych** – student of Computer Science Department, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: obertynskiya@gmail.com;

**Denysiuk Valerii Olexandrovich** – Ph.D., Assistant Professor, Assistant Professor of the Chair of Computer Science, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vad64@i.ua.