

# ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАПОВНЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Вінницький національний технічний університет

## **Анотація**

*Досліджено методи розв'язання густозаповнених лінійних систем рівнянь із використанням паралельних обчислень. Проаналізовано ефективність розпаралелення класичних ітераційних методів, таких як метод Якобі, метод Гауса-Зейделя та метод верхньої релаксації. Досліджено вплив розподілу обчислювального навантаження між процесорами на швидкість алгоритмів, враховуючи особливості багатоядерних і кластерних архітектур. Наведено експериментальні результати для різних конфігурацій багатоядерних процесорів і кластерних систем. Визначено оптимальні стратегії паралелізації для підвищення продуктивності обчислень. Розглянуто можливості використання сучасних бібліотек паралельного програмування OpenMP та MPI для реалізації ефективних алгоритмів розв'язування великих систем рівнянь.*

**Ключові слова:** паралельні алгоритми, лінійні системи рівнянь, метод Якобі, метод Гауса-Зейделя багатоядерні процесори, MPI, OpenMP.

## **Abstract**

*Methods for solving densely populated linear systems of equations using parallel computing have been developed. The effectiveness of parallelization of classical iterative methods, such as the Jacobi method, the Gauss-Seidel method, and the upper relaxation method, has been analyzed. The influence of the distribution of the computational load between processors on the speed of algorithms has been studied, taking into account the features of multi-core and cluster architectures. Experimental results for various configurations of multi-core processors and cluster systems have been presented. Optimal parallelization strategies for increasing computing performance have been determined. The possibilities of using modern parallel programming libraries OpenMP and MPI for implementing effective algorithms for solving large systems of equations have been considered.*

**Keywords:** parallel algorithms, linear systems of equations, Jacobi method, Gauss-Seidel method, multi-core processors, MPI, OpenMP.

## **Вступ**

Лінійні системи рівнянь є основою чисельних методів у багатьох галузях науки та техніки, таких, як фізика, математика, інженерія, фінансове моделювання, машинне навчання тощо [1-3]. Через високу обчислювальну складність їх розв'язання виникає необхідність використання паралельних алгоритмів, які дозволяють скоротити час обчислень та підвищити продуктивність. Сучасні паралельні обчислювальні архітектури дозволяють ефективно розподіляти навантаження між процесорами, забезпечуючи значне прискорення обчислень у порівнянні з послідовними методами [4, 5].

## **Постановка задачі дослідження**

Метою дослідження є аналіз ефективності паралельних алгоритмів розв'язання густозаповнених лінійних систем рівнянь, визначення оптимальних стратегій розподілу обчислень і оцінка продуктивності на різних апаратних конфігураціях.

Особливу увагу приділено методам розпаралелення, що дозволяють зменшити витрати часу при виконанні ітераційних процесів. Досліджено вплив комунікаційних витрат у кластерних системах та ефективність використання пам'яті при розпаралеленні обчислень.

### Виклад основного матеріалу

Розглянуто принципи паралельного розв'язування рівнянь, основні підходи до розпаралелення та розподілу обчислень. Виконано аналіз методів Якобі, Гауса-Зейделя та верхньої релаксації у контексті паралельної обробки даних [1-3, 6, 7]. Метод Якобі є природним кандидатом для паралельного виконання, оскільки його обчислення на кожній ітерації можуть бути виконані незалежно. Однак метод Гауса-Зейделя вимагає послідовного доступу до оновлених значень, що ускладнює його ефективну паралелізацію. Метод верхньої релаксації, що є узагальненням методу Гауса-Зейделя, також розглядається як можливий варіант для паралельного розв'язування рівнянь.

Здійснено тестування алгоритмів на багатоядерних процесорах та кластерних системах за допомогою бібліотеки MPI [8].

Проаналізовано масштабованість методів, ефективність завантаження обчислювальних ресурсів та вплив різних стратегій розподілу даних.

Досліджено можливості комбінованого підходу, що використовує OpenMP для внутрішньопроекторного розпаралелення та MPI для розподілу обчислень між вузлами кластеру.

*Результати дослідження* показали, що ефективність паралелізації залежить від розміру системи рівнянь, способу розподілу даних і топології взаємодії між процесорами.

Метод Якобі демонструє кращу масштабованість при великій кількості процесорів, тоді як метод Гауса-Зейделя має нижчу ітераційну складність, що може бути корисним у випадках, коли паралельні комунікаційні витрати значні.

Метод верхньої релаксації дозволяє досягнути компромісу між швидкістю збіжності та можливістю паралельного виконання. Проаналізовано ефективність використання OpenMP і MPI для різних підходів до розпаралелення.

### Висновки

Застосування паралельних алгоритмів дозволяє значно зменшити час розрахунків густозаповнених лінійних систем рівнянь.

Оптимальним для розподілених обчислень є метод Якобі, який добре масштабується при збільшенні кількості процесорів.

Водночас використання комбінованих підходів MPI та OpenMP дозволяє досягти вищої продуктивності при великих обсягах обчислень.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на адаптацію методів до сучасних гетерогенних систем із графічними процесорами та програмованими користувачем вентиляторами матрицями.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лященко, М. Я. Чисельні методи: Підручник / М. Я. Лященко, М. С. Головань. К.: Либідь, 1996. 288с. URL: [https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Lyashenko\\_1996\\_288.pdf](https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Lyashenko_1996_288.pdf).
2. Колесницький, О. К. Чисельні методи : навчальний посібник / О. К. Колесницький, І. Р. Арсенюк, В. І. Месюра. Вінниця : ВНТУ, 2017. 130 с. URL: [https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/IRVC/2021/Kolesnitskij\\_2017\\_130.pdf](https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/IRVC/2021/Kolesnitskij_2017_130.pdf).
3. Шахно С.М., Дудикевич А.Т., Левицька С.М. Практична реалізація чисельних методів лінійної алгебри: Навч. посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. 137 с. URL: <https://ami.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2013/10/Практикум-з-чисельних-методів-лінійної-алгебри.pdf>.
4. Минайленко Р.М. Паралельні та розподілені обчислення: навч. посіб. Кропивницький: Видавець Лисенко В. Ф., 2021. 153 с. URL: <https://dspace.kntu.kr.ua/server/api/core/bitstreams/396e02d2-725b-47b5-a1c0-ae07a9bec326/content>.
5. Wilkinson B., Allen M. Parallel Programming: Techniques and Applications Using Networked Workstations and Parallel Computers. Pearson, 2004. 249. URL: <https://dl.icdst.org/pdfs/files3/6b0ed37cdf2cd9ce301f85f13182bb8b.pdf>.
6. Метод Якобі: Як Він Працює і Чому Варто Спробувати? URL: <https://www.mathros.net.ua/nablyzhenyj-rozvjazok-systemy-linijnyh-rivnjan-metodom-prostoi-iteracii.html>.
7. Метод Зейделя: Від Теорії до Практики – Все, що Потрібно Знати. URL: <https://www.mathros.net.ua/nablyzhene-rozvjazannja-systemy-linijnyh-rivnjan-metodom-zejdelja.html>.
8. Message Passing Interface (MPI). URL: <https://www.techtarget.com/searchenterprisedesktop/definition/message-passing-interface-MPI>.

**Мунтян Дмитро Віталійович** – студент кафедри комп'ютерних наук, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: dmytrommon@gmail.com;

**Денисюк Валерій Олександрович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: vad64@i.ua.

**Muntian Dmytro Vitaliyovich** – student of Computer Science Department, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dmytrommon@gmail.com;

**Denysiuk Valerii Olexandrovich** – Ph.D., Assistant Professor, Assistant Professor of the Chair of Computer Science, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vad64@i.ua.