

ВИКОРИСТАННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ ДО ОКРЕМИХ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

¹ Комунальний заклад «Вінницький ліцей №4»
² Вінницький національний технічний університет

Анотація

Принцип Діріхле, відомий як "принцип комірок", дозволяє доводити існування певних конфігурацій точок, відрізків та інших геометричних об'єктів. В роботі розглянуто можливість його використання у задачах, пов'язаних із розміщенням точок на площині та, мінімальними відстанями між об'єктами.

Ключові слова: принцип Діріхле, комірки, принцип голубів, геометрія.

Abstract

The Dirichlet principle, known as the "cell principle", allows us to prove the existence of certain configurations of points, segments, and other geometric objects. The paper considers the possibility of its use in problems related to the placement of points on a plane and the minimum distances between objects.

Key words: Dirichlet principle, cells, pigeon principle, geometry.

Вступ

Вміння розв'язувати олімпіадні задачі є хорошим показником того, що людина є обдарованою. Олімпіадні задачі – це завдання які потребують творчого підходу і використання спеціальних методів у розв'язуванні. Розв'язування задач такого типу не є простим, але саме це і розвиває творчі і розумові здібності людини [1].

Одним з математиків, що працював над дослідженнями складних задач у різних областях математики, фізики та механіки був Йоганн Петер Густав Лежен-Діріхле. Це видатний німецький математик бельгійського походження, відомий своїм вагомим внеском у математичний аналіз. Діріхле працював ординарним професором в Берлінському університеті, а в Геттінгемському університеті обіймав посаду професора вищої математики. Однією з найвідоміших його робіт є принцип, який носить його ім'я – Принцип Діріхле.

У даній роботі вивчається можливість використання принципу Діріхле для розв'язування геометричних задач.

Результати дослідження

Принцип Діріхле – це комбінаторне твердження в математиці, яке було сформульовано в 1834 році [2]. Тоді цей принцип дістав свою першу й оригінальну назву – «принцип шухляд»:

«Якщо в n шухлядах не менше ніж $n+1$ предмет, то висуваючи ці шухляди ми принаймі в одній з них виявимо не менше ніж два предмети».

Крім такого вигляду, є ще одне формулювання: «Якщо у x коробках розміщено $x+1$ голуб, то хоча б у одній з коробок сидить не менше двох голубів» (див. рис. 1)



Рисунок 1. – Принцип голубів та коробок

Це є найпопулярніше і зрозуміле для кожного формулювання. Звичайно є й інші формування, як от принцип кролів і кліток, принцип коробок Діріхле і т. п.

Узагальнене твердження принципу Діріхле можна сформулювати так: «Якщо m предметів знаходиться в n шафах, то хоча б в одній шафці міститься не менше як $\frac{m}{n}$ предметів і хоча б в одній шафці міститься не більше як $\frac{m}{n}$ предметів». Дамо пояснення цьому формулюванню. Якщо в шафі не менше як $\frac{m}{n}$ предметів, тоді їх більше ніж два. Якщо в шафці предметів менше ніж $\frac{m}{n}$, тоді в n шафках разом предметів менше ніж $n \times \frac{m}{n} = m$.

При вирішенні геометричних задач можна зіткнутися із задачами певного типу [3], які вимагають пошук закономірностей у розподілі фігур на площині, знаходження мінімальних відстаней між деякими точками або доведення існування певних конфігурацій. Одним з способів вирішення таких завдань є принцип Діріхле. Розглянемо такі задачі.

Задача 1. Пряма k проходить через площину трикутника ABC (див. рис. 2), проте не перетинає жодну його вершину. Доведіть, що пряма k не може перетинати всі сторони ABC .

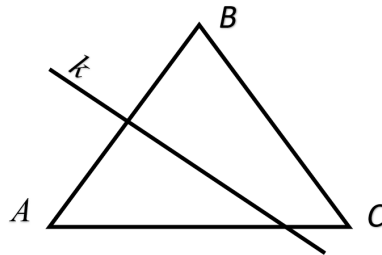


Рисунок 2. – Трикутник ABC з прямою k

Доведення. Можна уявити що пряма k розбиває трикутник ABC на дві площини – S_1 та S_2 . Вважатимемо, що S_1 і S_2 відкриті, тобто не містять пряму k . Замість голубів підставимо вершини трикутника, а коробками будуть площини. Оскільки проведена пряма k не перетинає жодну з цих вершин, то кожна з них знаходиться в тій чи іншій площині. Оскільки в трикутнику вершини є три, а площини є всього лиш дві, то в одна з них буде містити дві вершини. Припустимо що цими вершинами є B і C (можуть бути й інші вершини, але через те що принцип Діріхле не вказує конкретну з цих площин, то це не обов'язково будуть вершини B і C), які знаходяться в площині S_1 (тобто лежать по один бік від k). У такому випадку сторона BC не перетинається з прямою k . Тобто в трикутнику є така сторона яка не перетинається прямою k . Доведено.

Розглянемо задачу на знаходження відстаней між деякими точками.

Задача 2. Всередині рівностороннього трикутника ABC ($AB=BC=AC=1$) було розміщено 5 точок (див. рис. 3). Доведіть що дві з цих точок розташовані на відстані менше 0,5 сантиметри.

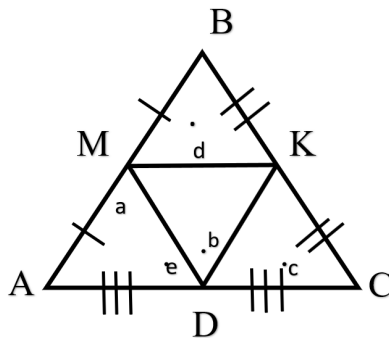


Рисунок 3. – Трикутник ABC з додатково побудованими середніми лініями

Доведення. Проведемо в трикутнику ABC середні лінії, які розділять його на 4 малих трикутника зі сторонами по 0,5 сантиметри. Ці маленькі трикутники будуть «коробками», а розміщені точки – «голубами». Виходить що у нас є 5 «Голубів» і 4 «Коробки». Використаємо принцип Діріхле. Оскільки точок у нас 5, а маленьких трикутників в яких вони розміщені є лише 4, то в одному з цих трикутників

буде дві точки, а оскільки сторони цих трикутників є по 0,5 сантиметрів, то всередині трикутників ці дві точки будуть розташовуватися на відстані менше 0,5 сантиметра. Доведено.

ВИСНОВОК

Принцип Діріхле є простим, але ефективним методом для доведення багатьох цікавих фактів у геометрії. Його універсальність дозволяє знаходити розв'язки нетривіальних задач і робить його важливим інструментом у математичних дослідженнях. Принцип Діріхле є потужним методом у комбінаторній геометрії та теорії графів. Його простота робить його зручним для доведення складних теорем без громіздких обчислень. Дослідження можливостей застосування принципу Діріхле в інших галузях геометрії та математики, наприклад, у дискретній геометрії, оптимізаційних задачах та теорії ймовірностей, відкриває нові напрямки для наукової роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ. Конспект лекцій /О. В. Шебаніна і ін.. – Миколаїв, 2020. – 130 с.
2. Blogspot. Блог Вчителя Математики. URL: https://numatematika.blogspot.com/2020/04/blog-post_9.html (дата звернення: 06.01.2025).
3. Webnode. Методи розв'язування нестандартних задач з математики. URL: <https://njestandartn-zadach.webnode.com.ua/> (дата звернення: 02.01.2025).

Рибінський Іван Максимович, комунальний заклад «Вінницький ліцей №4», учень 8 класу, rybivan11@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Rybinsky Ivan M., municipal institution "Vinnytsia Lyceum No. 4", 8th grade student, rybivan11@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com