

## Порівняння ефективності методів розв'язання задачі про перекриття набору точок мінімальною кількістю кіл

Вінницький національний технічний університет

### Анотація

Публікація присвячена дослідженню методів вирішення задачі про покриття набору точок мінімальною кількістю кіл заданого радіуса. Розглянуто практичне застосування цієї задачі та базові принципи підходу до її розв'язання. Також описано два алгоритми її розв'язку та оцінено їх складність.

**Ключові слова:** задача, набір точок, оптимальне покриття, коло, центр, покрита точка, зміщення, заданий радіус, крок, ефективність, складність, порівняння.

### Abstract

The publication is devoted to the study of methods for solving the problem of covering a set of points of the minimum number of circles of a given radius. The practical application of this problem and the basic principles of the approach to its solution are considered. Two algorithms for its solution are also described and their complexity is evaluated.

**Keywords:** problem, point set, optimal coverage, circle, center, covered point, offset, given radius, step, efficiency, complexity, comparison.

Задача про покриття набору точок мінімальною кількістю кіл заданого радіуса полягає у тому, щоб розмістити кола заданого радіуса на площині так, щоб покрити всі точки, використовуючи якнайменше кіл. Основна складність полягає в тому, що залежно від конфігурації точок на площині існує безліч можливих варіантів розташування кіл, і обчислення оптимального покриття може бути дуже складним через велику кількість варіантів, які необхідно перевірити.

У реальному світі людство досить часто стикається із цією проблемою. Наприклад, ця задача постає перед операторами стільникового зв'язку, яким треба оптимально покрити територію передавачами так, щоб мінімізувати кількість веж і одночасно забезпечити максимальне покриттях[1]. Також, у контексті сьогодення, не можна не згадати військову справу. Щоденно військовослужбовці повинні розміщати наявні системи ППО, що мають фіксований радіус дії, таким чином, щоб перекрити якомога більше населених пунктів та важливих об'єктів. І таких прикладів можна навести безліч. Саме тому постає питання пошуку найбільш оптимального алгоритму розміщення кіл на площині, який був би компромісним у плані обчислювальної складності та ефективності.

Головним питанням у контексті розв'язку цієї задачі є вибір принципу, якому треба слідувати для розміщення центра кожного кола. Не існує формул, які б дозволили обчислити координати центра кола, яке перекриває одночасно більше, ніж три точки. (У тому випадку достатньо побудувати серединні перпендикуляри для відрізків між двома парами точок. Центр кола повинен знаходитися на перетині цих двох серединних перпендикулярів. А так як за умовою коло має фіксований радіус, то потрібно також перевірити, чи відстань від кожної з трьох точок до центра кола менша за його радіус або дорівнює йому[2]).

Саме тому необхідно шукати інші методи для розміщення центра кола, які б не залежали від кількості точок, які потенціально можна перекрити. Логічно припустити, що найбільш очевидним підходом є обчислення координат центра кола на основі середнього арифметичного координат точок. І справді, такий метод є дієвим, але лише для невеликого набору випадків конфігурацій точок. Це, наприклад, рівномірне розміщення точок в ряд, сіткою і т. д. Для всіх решти випадків ефективність такого підходу буде дуже низькою, адже умовна "середня арифметична точка" завжди буде значно зміщена у випадках, коли точки мають нерівномірний розподіл. Наприклад, якщо більшість точок скупчені в одній частині простору, а кілька точок знаходяться далеко, "середня точка" зміститься в напрямку щільної групи, нераціонально залишаючи далекі точки поза покриттям. Тому запропоновано розглянути два методи, які мають іншу концепцію побудови кіл.

Першим із розглянутих методів вирішення цієї задачі є поворот навколо точки. Алгоритм обирає довільну точку з набору. Ця точка розглядається як опорна для побудови кола. Далі відбувається

обертання потенційного кола навколо цієї фіксованої точки, подібно до того, як кільце обертається навколо гвіздка, забитого у стіну. Обертання виконується за заданим кроком, який має бути досить малим для забезпечення бажаного рівня точності. Цей крок визначає кут, на який зміщується центр кола на кожній ітерації. Зміщення відбувається за формулами:

- $dx = radius \times \cos(angle)$ ;
- $dy = radius \times \sin(angle)$ .

Після кожного такого повороту кола алгоритм перевіряє, скільки точок з непокритого набору лежать всередині нього, використовуючи метод для обчислення відстані від нового центру до кожної з непокритих точок. Якщо відстань менша або дорівнює радіусу, то точка вважається покритою. Коли коло здійснило повний оборот навколо фіксованої точки (360°), алгоритм вибирає ту позицію, в якій коло перекрило найбільшу кількість точок. Після вибору найкращого центру кола, покриті точки видаляються з набору непокритих, і алгоритм продовжує процес для нової непокритої точки, повторюючи процедуру до покриття всіх точок з набору. Метод повороту навколо точки має складність  $O(n^3)$ , що зумовлено перебором кожної непокритої точки з набору, проходом по решті точкам (які є непокритими), та перевіркою покриття для кожної з них.

Другим методом для порівняння став метод “замітаючого кола”. В основі цього методу лежить прохід уявного кола по всій площині з невеликим кроком. Для кожного можливого центру кола алгоритм перевіряє, які з непокритих точок потрапляють всередину кола. Це здійснюється шляхом обчислення відстані від його центра до кожної з непокритих точок. Якщо відстань менша або дорівнює радіусу кола, точка вважається покритою. Алгоритм порівнює кількість точок, покритих цим колом, з максимальним значенням, яке вдалося отримати в попередніх позиціях. Після того, як це коло пройде всю зону, воно буде побудоване в тому місці, де перекриє найбільшу кількість точок. Складність цього алгоритму можна оцінити як  $O(n^2)$ . Очевидно, що швидкість його виконання напряму залежить від розмірів зони та вибору кроку проходження.

У таблиці 1 наведено результати роботи цих алгоритмів для кіл радіусом 150 пікселів на зоні розміром 1800×1800 пікселів при хаотичному розміщенні точок.

Таблиця 1. Порівняння результатів роботи запропонованих алгоритмів

	Поворот навколо точки	Метод “замітаючого кола”
Кількість точок	Кількість кіл / Час, с	
50	18 / 0,089	17 / 16,54
150	34 / 0,53	34 / 87,1
350	47 / 3,1	47 / 246,53
500	52 / 8,25	53 / 451,17
1000	61 / 35,4	59 / 1172,51
2000	72 / 234,6	71 / 2279,79

Відповідно до цього можна зробити висновок, що алгоритм повороту навколо точки є більш доцільним, ніж метод “замітаючого кола”, адже результати його роботи майже не відрізняються від результатів роботи другого алгоритму, проте час виконання значно менший. Низьку швидкість роботи методу “замітаючого кола” можна пояснити доволі значними розмірами робочої зони. Саме тому зменшити час його роботи можна або зменшивши робочу зону, або збільшивши значення кроку проходження, що вплине на його ефективність.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Інтернет за містом - у селі, на дачі, у приватному будинку [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.4g.kiev.ua/ua/blog/internet-za-gorodom> (дата звернення: 12.10.2024). – Назва з екрана.

2. How to Draw a Circle Given Three Points [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.wikihow.com/Draw-a-Circle-Given-Three-Points> (дата звернення: 06.10.2024). – Назва з екрана.

**Суліма Юрій Олександрович** – студент групи 5ПІ-236, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [yurij.sulima876@gmail.com](mailto:yurij.sulima876@gmail.com)

Науковий керівник: **Ткаченко Олександр Миколайович** — к.т.н., доцент кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет.

**Sulima Yuriy O.** – Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [yurij.sulima876@gmail.com](mailto:yurij.sulima876@gmail.com)

Supervisor: **Oleksandr Tkachenko** — Cand. Sc. (Eng.), assistant professor of the Software Chair, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, [alextk1960@gmail.com](mailto:alextk1960@gmail.com).