УДК 517.5.52

А. М. Павлюченко [1]
Н. В. Сачанюк-Кавецька [2]

ТОТОЖНІСТЬ ДІОФАНТА ТА ЇЇ МОДИФІКАЦІЇ

[1] Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради
[2] Вінницький національний технічний університет

Анотація
Інтерес до діофантових рівнянь викликаний великою кількістю життєвих ситуацій, розв'язання яких можна реалізувати за допомогою цих рівнянь. В класичному розумінні це поліноміальні рівняння з цілими (раціональними) коефіцієнтами, в яких змінні можуть приймати тільки цілі значення. Саме ця особливість призвела до дослідження властивостей чисел. Дана робота присвячена розгляду тотожності Діофанта та її можливій модифікації.

Ключові слова: тотожність, рівняння, цілі числа, Діофант.

Abstract
Interest in Diophantine equations is caused by a large number of life situations, the solution of which can be realized with the help of these equations. In the classical sense, these are polynomial equations with integer (rational) coefficients, in which the variables can take only integer values. It was this feature that led to the study of the properties of numbers. This work is devoted to the consideration of the identity of Diophantus and its possible modification.

Key words: identity, equations, integers, Diophantus.

Вступ

У класичному розумінні, діофантові рівняння — це поліноміальні рівняння з цілими (раціональними) коефіцієнтами, в яких змінні можуть приймати тільки цілі значення, названі так на честь давньогрецького математика III ст. Діофанта Александрійського. Основний твір Діофанта — „Арифметика" містив 13 книг [1-2]. До нашого часу збереглись лише перших 6 книг, в яких зібрано 189 задач на знаходження додатних цілих розв'язків невизначених рівнянь з вдало підібраними ілюстраціями та методами розв'язання, а також дано початки алгебри. Розв'язати діофантове рівняння означає: 1) з'ясувати, чи має рівняння розв'язок в цілих числах; 2) якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, то з'ясувати скінченна чи нескінченна множина його розв'язків; 3) знайти всі цілі розв'язки рівняння. Сьогодні в термін «діофантове рівняння» вкладають ширший зміст, розуміючи під цим рівняння (не обов'язково раціональне) з вимогою знайти його цілі (раціональні) корені. Діофантові рівняння часто зустрічаються в завданнях математичних олімпіад різних рівнів (школярів та студентів) і не залишають байдужими до себе тих, хто по-справжньому цікавиться математикою. Не зважаючи на те, що існує чимало робіт присвячених діофантовим рівнянням, немає джерел, в яких би був систематично викладений матеріал в доступній для початківця формі, тому будь-який розгляд цих рівнянь є актуальним.

Результати дослідження

Інтерес до діофантових рівнянь викликаний великою кількістю життєвих ситуацій, розв'язання яких можна реалізувати за допомогою цих рівнянь. Наприклад,

- Чи можна заплатити за покупку вартістю 1000 грн. 40 купюрами номіналом 1 грн., 10 грн. та 100 грн.?;
- Товарні вагони з вантажами типу А і Б важать відповідно 27 т і 43 т. Скільки вагонів, навантажених товарами А і Б, потрібно для формування товарного потягу для перевезення вантажу масою 1800 т?;
- Для перевезення зерна є мішки місткістю по 60 і 80 кг. Скільки потрібно тих і інших мішків для перевезення 440 кг зерна?.

Оскільки коефіцієнти Діофантових рівнянь та їх розв'язки мають бути лише цілі значення, то саме ця особливість призвела до дослідження властивостей чисел і, як результат, доведення так званої тотожності Діофанта.

Розглянемо задачу з «Арифметики» Діофанта [3]: довести, що добуток двох чисел, кожне з яких є сумою двох квадратів, можна подати як сума квадратів. Для цього потрібно знайти добуток двох даних чисел:

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1+bb_1)^2+(ab_1+ba_1)^2.$$

Якщо доданки згрупувати інакше, то добуток набуває вигляду:

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1-bb_1)^2+(ab_1-ba_1)^2.$$

Тому маємо тотожність Діофанта $(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1\pm bb_1)^2+(ab_1\pm ba_1)^2$.

Вивченням тотожності Діофанта Займався О. Коші, який розглянув та довів тотожність про суму квадратів на множині комплексних чисел. Зокрема, за ідеєю Коші потрібно розглядати чотири попарно спряжені комплексні числа $a+bi, a-bi, a_1+b_1i, a_2+b_2i$. Знайдемо добуток всіх, перемножуючи пари спряжених чисел. Якщо помножити перше на третє і друге на четверте, то загальний добуток дорівнює:

$$(aa_1-bb_1+(ab_1+ba_1)i)(aa_1-bb_1-(ab_1+ba_1)i)=(aa_1-bb_1)^2+(ab_1-ba_1)^2.$$

Виникає запитання, чи можна модифікувати тотожність Діофанта. Для цього можна збільшувати степені та кількість доданків-квадратів. Аналіз формул доводить, що узагальнена тотожність для суми кубів, а також суми четвертих степенів не виконується. Також відомо, що добуток двох чисел, кожне з яких є сумою трьох квадратів неможливо подати як суму трьох інших квадратів. Цей результат ілюструє задача Лагранжа, яка пропонує перевірити тотожність:

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2=(ab_1-a_1b)^2+(ac_1-a_1c)^2+(bc_1-c_1b)^2.$$

Доведення можна виконати безпосередніми перетвореннями виразів. Отже, якщо два множники є сумами трьох квадратів, то їх добуток не є сумою трьох квадратів.

Формули для добутку сум двох та чотирьох квадратів використовують в алгебрі комплексних чисел та гіперкомплексних чисел із трьома уявними одиницями. С. Робертсон (1859 – 1899) з'ясував, що для множників з 16 квадратів таке подання неможливе. Адольф Гурвіц (1859 – 1919) довів, що вказаний спосіб подання добутку у вигляді суми квадратів має місце тільки для двох множників з двох, чотирьох і восьми квадратів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бородін, О. І., Бугай, А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики. Київ : Вища школа. 2020 – 552 с.
2. Дідківська Т.В., Сверчевська І.А. Визначні історичні задачі з теорії чисел // Актуальні питання природничо-математичної освіти : збірка наукових праць №1, СДПУ ім. А.С. Макаренка. – Суми : ВВП «Мрія», 2013. – С. 8–18.
3. Wolfgang M. Schmidt.Diophantine approximations and Diophantine equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag 2000

Антон Михайлович Павлюченко, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, ahrohahroh@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна*** - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Pavlyuchenko Anton M., communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, ahrohahroh@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com