

## ПОБУДОВА ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТІВ ТАНГРАМ ТА ЇХ ПАРАЛЕЛОГРАМІВ

<sup>1</sup> Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради

<sup>2</sup> Вінницький національний технічний університет

### Анотація

Числові ряди є незамінними при розв'язуванні прикладних задач в архітектурі, економіці, фізиці, хімії, техніці та можуть бути ефективним інструментом наукових математичних досліджень, оскільки дозволяють за допомогою наближених обчислень прийти до точних результатів. Найбільш цікавим застосуванням рядів є дослідження логічного аспекту математичного мислення, з використанням головоломок, та можливість їх візуалізації. В даній роботі розглянуто можливість побудови числових рядів з використанням паралелограмів квадрату танграм.

**Ключові слова:** танграм, логічне мислення, числові ряди.

### Abstract

Numerical series are indispensable for solving applied problems in architecture, economics, physics, chemistry, engineering and can be an effective tool for scientific mathematical research, as they allow using approximate calculations to arrive at accurate results. The most interesting application of series is the study of the logical aspect of mathematical thinking, using puzzles, and the possibility of their visualization. In this work, the possibility of constructing number series using parallelograms of the tangram square is considered.

**Key words:** tangram, logical thinking, numerical series.

### Вступ

Числові ряди широко використовується в різноманітних дослідженнях пов'язаних з обчисленням значень функцій, інтегралів, наближеним розв'язуванням диференціальних рівнянь [1-2]. Вони є незамінними при розв'язуванні прикладних задач в архітектурі, економіці, фізиці, хімії, техніці та можуть бути ефективним інструментом наукових математичних досліджень, оскільки дозволяють за допомогою наближених обчислень прийти до точних результатів. Найбільш цікавим застосуванням рядів є дослідження логічного аспекту математичного мислення та можливість їх візуалізації [3].

### Результати дослідження

Популярною та цікавою математичною головоломкою є танграм, в основу якого покладено рішення геометричних задач на розрізання (див. рис. 1) [4]. Вона містить сім гральних кісток (танів), з яких необхідно створити довільну задану форму. Застосування цієї головоломки дозволяє розвинути різні розумові процеси такі як зіставлення, узагальнення, встановлення послідовності, визначення відношення «ціле-частина».

Якщо обрати одиницю вимірювання таким чином, що всі сім елементів можуть бути зібрані в квадрат зі стороною рівною одиниці, то сім елементів будуть такими:

- паралелограм (сторони  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа  $\frac{1}{8}$ ) – 1;
- квадрат (сторона  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа  $\frac{1}{8}$ ) – 2;

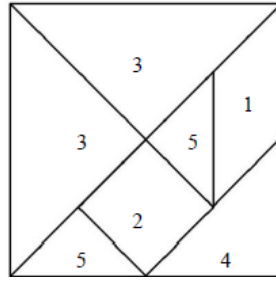


Рисунок 1. Загальний вигляд головоломки танграм

- 2 великих прямокутних трикутника (гіпотенуза 1, катети  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , площа  $\frac{1}{4}$ ) – 3;
- 1 середній прямокутний трикутник (гіпотенуза  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , катети  $\frac{1}{2}$ , площа  $\frac{1}{8}$ ) – 4;
- 2 малих прямокутних трикутників (гіпотенуза  $\frac{1}{2}$ , катети  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , площа  $\frac{1}{16}$ ) – 5.

Серед цих семи танів паралелограм є особливим, оскільки він не має осової симетрії, а має лише симетрію обертальну. Його дзеркальне зображення може бути отримано лише перевертанням цього елемента.

Розглянемо танграм  $T=ABCD$  (див. рис. 2)

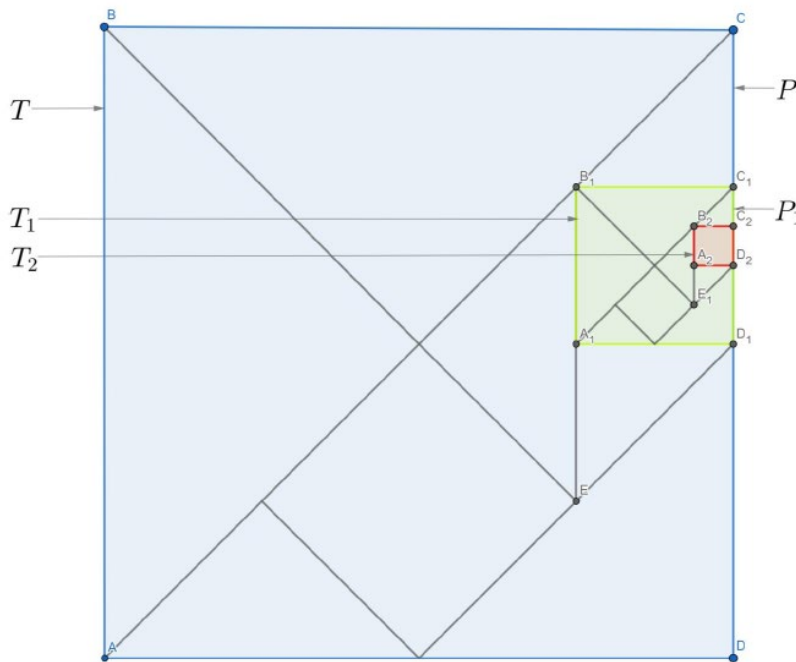


Рисунок 2. Танграми вписані в паралелограми попередніх танграмів

В танграмі  $T$  маємо паралелограм  $P = EB_1CD_1$ . В паралелограм  $P$  впишемо танграм  $T_1$  так, що дві сторони танграма цього танграма належать протилежним сторонам паралелограма  $P$ . Отримали новий танграм  $T_1 = A_1B_1C_1D_1$ , який має паралелограм  $P_1 = E_1B_2C_2D_2$ . Використовуючи такий самий підхід, впишемо в одержаний паралелограм танграм  $T_2 = A_2B_2C_2D_2$  і т. д. Припускаємо, що дана процедура виконується нескінченну кількість разів. Таким чином, ми можемо побудувати такі ряди:

- ряд діагоналей танграмів;
- ряд площ танграмів;

- ряд висот паралелограмів;
- ряд площ паралелограмів;
- ряд менших діагоналей паралелограмів;
- ряд відношень відповідних площ танграмів до площ паралелограмів.

Побудуємо, наприклад, ряд висот паралелограмів та ряд площ паралелограмів.

Легко бачити, що висота паралелограма  $P$  паралельна стороні танграма  $T$  і його висота, що опущена на більшу сторону, обчислюється так:  $h = \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}$ . Паралелограм має сторони  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , його площа дорівнює  $\frac{1}{8}$ . Це і будуть перші елементи шуканих рядів. Тепер потрібно знайти залежність між елементами танграма  $T$  і елементами танграма  $T_1$ . Для цього відшукаємо залежність між їх сторонами. Оскільки сторона танграма  $T_1$  паралельна стороні танграма  $T$ , тоді:  $a_1 = B_1C_1 = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}a$ . Зрозуміло, що дана залежність буде виконуватись для всіх інших танграмів та їх елементів. Таким чином, можемо записати ряд висот паралелограмів:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Прорахуємо площі інших паралелограмів в танграмах за формулою:  $S = h_b \cdot b$ , де  $b$  – більша сторона,  $h_b$  – висота, опущена на цю сторону. Для танграма  $T_1$  маємо:  $b = \frac{1}{8}$ ,  $h_b = \frac{1}{16}$ ,  $S = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{128}$ ; для  $T_2$ :  $b = \frac{1}{32}$ ,  $h_b = \frac{1}{64}$ ,  $S = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2048}$ ; для  $T_3$ :  $b = \frac{1}{128}$ ,  $h_b = \frac{1}{256}$ ,  $S = \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{128} = \frac{1}{32768}$  і т. д.

Таким чином, ряд площ паралелограмів:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{32768} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-4n}.$$

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ. Конспект лекцій /О. В. Шебаніна і ін.. – Миколаїв, 2020. – 130 с.
2. Сачанюк-Кавецька Н. В. Окремі розділи спецкурсу вищої математики. Частина 1: електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) ви-користання [Електронний ресурс] / Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2023. – 117 с.
3. Боснюк В. Ф. Математичні методи в психології. Курс лекцій – Харків, 2016. – 56 с.
4. Anno, Mitsumasa. Anno's Math Games (three volumes). New York: Philomel Books, 1987. ISBN 0-399-21151-9 (v. 1), ISBN 0-698-11672-0 (v. 2), ISBN 0-399-22274-X (v. 3).

**Титко Максим Володимирович**, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, [maxtytko07@gmail.com](mailto:maxtytko07@gmail.com)

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

**Titko Maksym V.**, communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, [maxtytko07@gmail.com](mailto:maxtytko07@gmail.com)

**Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)