УДК 517.5.52

Б. С. Табачук [1]
Н. В. Сачанюк-Кавецька [2]

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ПОБУДОВАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТІВ ТАНГРАМ ТА ОПИСАНИХ КІЛ

[1] Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради
[2] Вінницький національний технічний університет

Анотація
Однією з найважливіших наук, що активно використовується в науково-технічній діяльності є математика, яка відіграє роль мови. Професія інженера висуває серйозні вимоги до оволодіння багатьма професійними знаннями, що базуються на математичній теорії, зокрема теорії рядів, яка широко використовується в різноманітних теоретичних дослідженнях пов'язаних з обчисленням значень функцій, інтегралів, наближеним розв'язуванням диференціальних рівнянь. В даній роботі розглянуто дослідження збіжності числових рядів побудованих з використанням елементів квадрату танграм.

Ключові слова: танграм, логічне мислення, числові ряди.

Abstract
One of the most important sciences that is actively used in scientific and technical activities is mathematics, which plays the role of language. The profession of an engineer puts forward serious requirements for the mastery of many professional knowledge based on mathematical theory, in particular the theory of series, which is widely used in various theoretical studies related to the calculation of function values, integrals, and the approximate solution of differential equations. This paper examines the study of the convergence of numerical series constructed using the elements of the tangram square.
Key words: tangram, logical thinking, numerical series.

Вступ

Протягом всієї історії розвитку науки та техніки проблема інженерної діяльності займала важливе місце. Однією з найважливіших наук, що активно використовується в інженерній практиці є математика. Математика відіграє роль мови в науково-технічній діяльності, і тому професія інженера висуває серйозні вимоги до оволодіння багатьма професійними знаннями, що базуються на математичній теорії. Прикладом таких знань можна вважати теорію рядів, яку започаткував у 18 столітті Леонард Ейлер.

Теорія числових рядів широко використовується в різноманітних теоретичних дослідженнях пов'язаних з обчисленням значень функцій, інтегралів, наближеним розв'язуванням диференціальних рівнянь [1-2]. Оскільки числові ряди дають можливість за допомогою наближених обчислень прийти до точних результатів, то вони є незамінними при розв'язуванні прикладних задач в архітектурі, економіці, фізиці, хімії, техніці та можуть бути ефективним інструментом наукових математичних досліджень.

Результати дослідження

Танграм – старовинна східна головоломка (див. рис. 1) [3]. З нею можна навчитись аналізувати зображення, виділяти в них геометричні фігури, візуально розбивати цілий об'єкт на частини, і навпаки – складати з елементів задану модель. Складання за схемами сприяє розвитку посидючості, уваги, уяви, логічного мислення, допомагає створювати ціле з частин і передбачати при цьому результат своєї діяльності. Всі ці навички необхідні для розвитку логічного мислення та можливості формування нестандартних ідей. Найбільш цікавою математичною головоломкою є танграм, в основу якого покладено рішення геометричних задач на розрізання.

Якщо обрати одиницю вимірювання таким чином, що всі сім елементів можуть бути зібрані в квадрат зі стороною рівною одиниці, то сім елементів будуть такими:

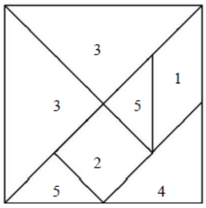

Рисунок 1. Загальний вигляд головоломки танграм

В роботі [4] було використано елементи танграмів для побудови числових рядів. Зокрема,

- Ряд сторін танграмів:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}. \qquad (1)$$

- Ряд діагоналей танграмів:

$$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{16}+\frac{\sqrt{2}}{64}+\frac{\sqrt{2}}{256}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}. \qquad (2)$$

Дослідимо збіжність цих рядів.

Очевидно, що для рядів 1-2 виконується необхідна умова збіжності, оскільки в усіх цих випадках маємо справу з геометричними прогресіями із знаменником меншим за одиницю. Тому дослідимо одержані числові ряди на збіжність за допомогою достатньої ознаки: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, де S – сума ряду, а S_n – частинні суми ряду, які обчислюються за формулою суми геометричної прогресії.

Таким чином, для ряду сторін танграма (1) маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-4^{-n}\right)=\frac{4}{3}(1-\lim_{n\to\infty}4^{-n})=\frac{4}{3}.$$

Побудуємо графік залежності частинних сум ряду від кількості доданків (див. рис. 2)

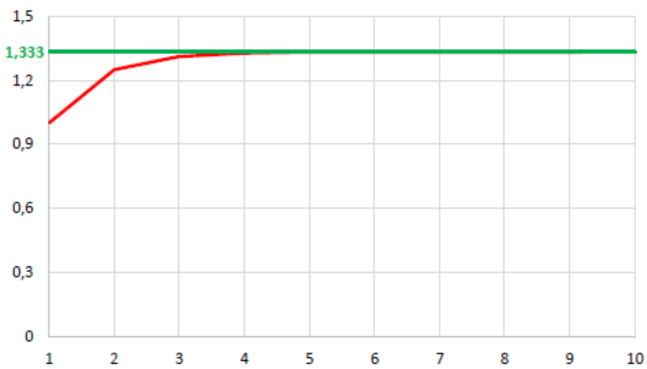

Рисунок 2. Залежність частинних сум ряду сторін танграма від кількості доданків

Легко бачити, що графік спочатку стрімко зростає, а потім, із збільшенням доданків, набуває постійної швидкості в межах суми ряду, яка дорівнює $\frac{4}{3}\approx 1{,}333$.

Міркуючи аналогічно, для ряду діагоналей танграмів знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n})=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Можна показати, з якою швидкістю змінюються частинні суми діагоналей танграма (див. рис. 3) наближаючись до суми ряду. Як і в попередньому випадку розглядаємо частинні суми $S_1, S_2, ..., S_{10}$.

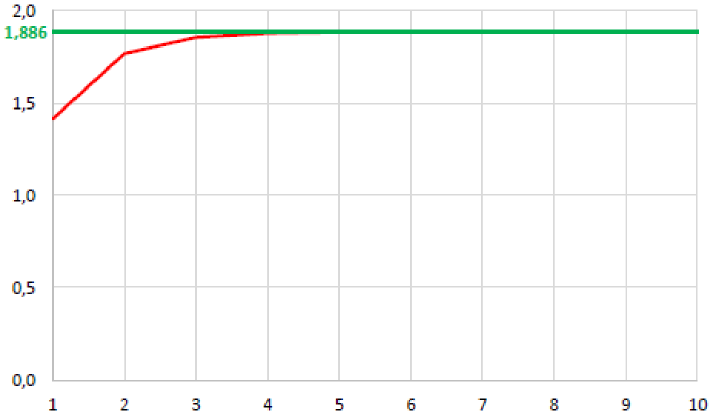

Рисунок 3. Залежність частинних сум ряду діагоналей танграма від кількості доданків

Графік спочатку різко зростає, а потім набуває постійної швидкості в межах суми ряду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ. Конспект лекцій /О. В. Шебаніна і ін.. – Миколаїв, 2020. – 130 с.
2. Сачанюк-Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник /Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. – Вінниця ВНТУ, 2018. – 138 с.
3. Anno, Mitsumasa. Anno's Math Games (three volumes). New York: Philomel Books, 1987. ISBN 0-399-21151-9 (v. 1), ISBN 0-698-11672-0 (v. 2), ISBN 0-399-22274-X (v. 3).
4. Грабенко В. В. Побудова числових рядів за допомогою квадратів танграм та описаних кіл [Електронний ресурс] / В. В. Грабенко, Н. В. Сачанюк-Кавецька // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2023)», Вінниця, 12-13 травня 2023 р. – Електрон. текст. дані. – 2023. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2023/paper/view/1687.

Табачук Богдан Сергійович, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, tabacukbogdan@gmail.com
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com
Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна -*** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Tabachuk Bohdan S., communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, tabacukbogdan@gmail.com
Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com
Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com