УДК 517.5.52

О. А. Жовмір [1]
Н. В. Сачанюк-Кавецька [2]

ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ

[1] Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради
[2] Вінницький національний технічний університет

Анотація
Ланцюгові дроби, що мають широке застосування, зокрема і при побудові календарів, можна вважати системою числення, яка дозволяє обчислювати арифметичні корені, дроби, трансцендентні числа В даній роботі розглянуто можливість застосування ланцюгових дробів до розв'язування діофантових рівнянь.

Ключові слова: ланцюговий дріб, підхідний дріб, Діофантове рівняння, загальний розв'язок.

Abstract
Chained fractions, which are widely used, in particular, in the construction of calendars, can be considered a calculation system that allows calculating arithmetic roots, fractions, transcendental numbers. This paper considers the possibility of using chained fractions to solve Diophantine equations.

Key words: chain fraction, approximate fraction, Diophantine equation, general solution**.**

Вступ

Історія введення й застосування ланцюгових дробів починається зі способу добування арифметичних квадратних коренів, що застосовувався ще в стародавньому Вавилоні [1, 2]. У середньовіччі перський філософ, математик, астроном і поет Омар Хайям займався реформуванням календаря базуючись на ланцюгових дробах. Уперше ланцюгові дроби як математичне поняття визначив італійський математик Р. Бомбеллі в роботі «Алгебра», яка була опублікована у 1572 році. У ній було описано процес послідовного утворення нескінченних неперервних дробів, що одержуються при розкладі деяких дійсних чисел. У 1613 році італійський математик А. Катальді ввів при записі ланцюгового дробу повторне застосування дробової риски, тільки замість знаку «+» він писав «et» (сполучник і). Німецький математик Д. Швентер прийшов до ланцюгових дробів шляхом наближеного подання звичайних дробів із великим чисельником і знаменником та відкрив рекурентні співвідношення для послідовного обчислення чисельників і знаменників підхідних дробів. Пізніше, англієць В. Броункер застосував ланцюгові дроби для уточнення значення числа π . Ще один крок у дослідженні ланцюгових дробів був зроблений нідерландським фізиком, математиком і астрономом Х. Гюйгенсом, який розглядав такі дроби в задачі підбору зубчастих коліс, що були потрібні для побудови моделі Сонячної системи. Першим систематизував знання про ланцюгові дроби і виклав їх повну теорію швейцарський математик Леонард Ейлер.

Розв'язуванням невизначених рівнянь першого ступеня в цілих числах займалися Діофант, індійські вчені, а також учені народів Середньої Азії. Деякі такі рівняння з двома і трьома невідомими з'явилися у зв'язку з проблемами, що виникли в астрономії, наприклад у зв'язку з проблемою визначення періодичності повторення небесних явищ. Діофантовим рівнянням називають алгебраїчне рівняння від двох чи більше змінних з цілими коефіцієнтами, розв'язки якого треба знайти у цілих числах. Загального способу розв'язання таких рівнянь не існує. Однак існує велика кількість конкретних способів розв'язування діофантових рівнянь, зокрема за допомогою ланцюгових дробів.

Результати дослідження

Вираз вигляду

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots}}}=\left[q_0;q_1,q_2,q_3,\dots\right],\ q_k\in N$$

називають елементарним ланцюговим дробом [3]. Відомо, що у випадку, коли послідовність $\left(q_i\right)$ – скінченна, то ланцюговий дріб дорівнює деякому раціональному числу.

Дроби

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_1}{1},\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1},\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},...$$

називають підхідними дробами і вони відіграють важливу роль при розв'язуванні Діофантових рівнянь. Апаратом для знаходження елементів скінченного ланцюгового дробу є алгоритм Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника.

Найпростішими з діофантових рівнянь є лінійні рівняння з двома змінними:

$$ax+by=c, \tag{1}$$

де a,b,c - дані цілі числа [4].

Множина розв'язків цього рівняння або порожня, або нескінченна. Щоб розв'язати його, скористаємся властивостями найбільшого спільного дільника двох чисел.

Нехай $d=(a,b)$ – найбільший спільний дільник чисел a і b. Ліва частина рівняння ділиться на d, бо на d ділиться кожен з доданків. Тоді на d повинна ділитись й права частина. Отже, це рівняння може мати розв'язки лише тоді, коли c ділиться на d: поділивши обидві частини рівняння (1) на d, отримаємо рівняння, рівносильне даному, коефіцієнти якого взаємно прості числа.

Якщо (x_1,y_1) – пара цілих чисел, що задовольняє рівняння (1), де $(a,b)=1$, то загальний розв'язок цього рівняння в цілих числах можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x=x_1+bt, \\ y=y_1-at. \end{cases} \quad t\in Z \tag{2}$$

Отже, розв'язки рівняння (1) в цілих числах зводяться до знаходження окремого розв'язку цього рівняння.

Окремий розв'язок у цілих числах рівняння (1), де $a,b,c\in Z\ i\ (a,b)=1$, можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} x_0=(-1)^{n-1}\cdot c\cdot Q_{n-1}+bt, \\ y_0=(-1)^{n}\cdot c\cdot P_{n-1}-at, \end{cases} \tag{3}$$

де $t\in Z, P_{n-1}, Q_{n-1}$ – чисельник і знаменник підхідного дробу $(n-1)$-го порядку ланцюгового дробу $\frac{a}{b}$.

Наприклад, потрібно розв'язати рівняння у цілих числах

$$112x+83y=119. \tag{4}$$

В нашому випадку $\frac{a}{b}=\frac{112}{83},\ \left[\frac{112}{83}\right]=1,\ \frac{112}{83}=1+\frac{29}{83}$, для одержання ланцюгового дробу, який відповідає даному дробу, використаємо алгоритм Евкліда:

$$\begin{aligned} &83\div 29=2(ост.25); \\ &29\div 25=1(ост.\,4); \\ &25\div 4=6(ост.\,1); \\ &4\div 1=4(ост.\,0). \end{aligned}$$

Тоді маємо: $\frac{112}{83}=[1;2,1,6,4]$. В даному випадку $n=4$, отримаємо:

$$\frac{112}{83}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}}}.$$

Для знаходження підхідного дробу $\frac{P_3}{Q_3}$ складемо допоміжну розрахункову таблицю (табл. 1).

Таблиця 1 Схема утворення підхідних дробів

k	-1	0	1	2	3	4
q_k	–	1	2	1	6	4
P_k	1	1	4	5	34	133
Q_k	0	1	2	3	20	83

Таким чином, $\frac{P_3}{Q_3}=\frac{34}{20}$,

$$\begin{cases} x_0=(-1)^3\cdot 119\cdot 20+83t, \\ y_0=(-1)^4\cdot 119\cdot 34-112t, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_0=-2380+83t, \\ y_0=4046-112t, \end{cases} \quad t\in Z.$$

Приймемо, наприклад, $t=25$, тоді: $\begin{cases} x_1=-305, \\ y_1=1246, \end{cases}$ а загальний розв’язок буде таким:

$$\begin{cases} x=-305+83t, \\ y=1246-112t. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Призва Г. Й. Ланцюгові дроби і календарні системи / *У світі математики*: зб. наук.-попул. статей, т.9, 1978.
2. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел. У 2 ч. Ч. 2 . – К. :Вища школа, 1976. – 384 с.
3. Чудовська К. Г. Деякі застосування ланцюгових дробів / *У світі математики.* – т. 23, 2017.
4. Гнезділова Т. Діофантові рівняння / *Математика*. - №46-47, 2009.

Жовмір Олександр Андрійович, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, sashkazhova@gmail.com
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com
Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна -*** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Zhovmir Oleksandr A., communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, sashkazhova@gmail.com
Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com
Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com