УДК 517.5.52

**В. К. Туревич** [1]
**Н. В. Сачанюк-Кавецька** [2]

# ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРИ-ГОЛОВОЛОМКИ ХАНОЙСЬКА ВЕЖА

[1] Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради
[2] Вінницький національний технічний університет

***Анотація***
*Важливу роль у розвитку і вдосконаленні логічного мислення відводять головоломкам. Ці ігри вимагають проявити винахідливість, кмітливість, вміння критично оцінити умови або постановку питання. З давніх часів розв'язування головоломок призводило до виникнення нових ідей та математичних підходів. В даній роботі розглянуто різні підходи до розв'язування гри-головоломки Ханойська вежа, зокрема розглянуто можливість використання теорії графів та двійкової системи числення.*

**Ключові слова:** логічне мислення, ханойська вежа, граф, фрактальний трикутник.

***Abstract***
*Puzzles play an important role in the development and improvement of logical thinking. These games require ingenuity, cleverness, the ability to critically evaluate the conditions or the formulation of the question. Since ancient times, solving puzzles has led to new ideas and mathematical approaches. In this paper, various approaches to solving the puzzle game Tower of Hanoi are considered, in particular, the possibility of using graph theory and the binary number system is considered.*

**Key words:** logical thinking, Hanoi tower, graph, fractal triangle.

## Вступ

Розум, свідомість та мислення визначають унікальність людини та складають основи логіки. Вміння логічно мислити дозволяє знайти найбільш простий і безпечний вихід з проблемної ситуації, уникати помилок (як професійних, так і життєвих), грамотно викладати свої думки і т. ін. При цьому слід зауважити, що логічне мислення може розвинути та вдосконалювати будь-хто. Важливу роль у цьому вдосконаленні відводять головоломкам – іграм, що вимагають проявити винахідливість, кмітливість, оригінальність мислення та вміння критично оцінити умови або постановку питання. Головоломки використовували ще з давніх часів і, досить часто, розв'язування головоломок призводило до виникнення нових ідей або математичних підходів. До головоломок «з історією» відноситься головоломка Ханойська вежа [1, 2].

Головоломку Ханойська вежа розробив французький математик Едуард Люка, який презентував її в 1883 році [3]. Анонсована легенда про великий храм Варнасі, де під куполом, що символізує центр світу, знаходиться бронзовий диск, а на ньому закріплені три алмазних стрижні, за допомогою яких відбувається відлік часу до кінця світу, була придумана Люка з метою зацікавлення публіки. Як було написано на оригінальній упаковці, головоломку привіз з Тонкіна професор Н. Клаус з Сіама, мандарин коледжу Лі Су Цян. Але і це виявилось грою слів, анаграмою зі слів «Люка з Дам'єна, зі школи Сан-Луї», де він викладав.

В класичній версії гра складається з підставки з трьома стрижнями, на кожен з яких нанизано певну кількість дисків різного розміру, від більшого знизу до меншого зверху. Гра полягає в тому, щоб перемістити диски з одного стрижня на інший, не порушуючи такі правила:

- за один хід можна перемістити тільки один диск;
- не можна переміщувати диск на сусідній стрижень, якщо на ньому є диск меншого розміру.

Коли дисків мало, гра здається простою. Але із збільшенням кількості дисків зростає і кількість кроків для розв'язування та ускладнюється сама гра.

**Результати дослідження**

Постає питання у скільки кроків розв'язується головоломка. Припустимо, що в нас на стрижень нанизано три диски. Тоді

- переміщуємо маленький диск на стрижень C (див. рис. 1);
- другим рухом переміщуємо середній диск на стрижень B;
- третім рухом переміщуємо маленький диск на стрижень B;
- переміщуємо великий диск на стрижень C;
- п'ятим рухом переміщуємо маленький диск на стрижень A;
- переміщуємо середній диск на стрижень C;
- сьомим рухом переносимо маленький диск на стрижень C.

Таким чином, розв'язування становить сім кроків.

Очевидно, що процес розв'язування ділиться на три частини. Спочатку переноситься башта з двох дисків зі стрижня A на стрижень B. Потім переміщуємо великий диск зі стрижня A на стрижень C, і насамкінець, також намагаючись максимально скоротити кількість кроків, зі стрижня B на стрижень C переноситься башта з двох дисків.

Аналогічним чином розв'язується і Ханойська вежа з чотирьох дисків. Спочатку три верхніх переміщують на стрижень B, а потім великий – з A на C, в кінці три диски, що залишилися, переміщуємо з B на C. Тут потрібно 7+1+7=15 кроків.

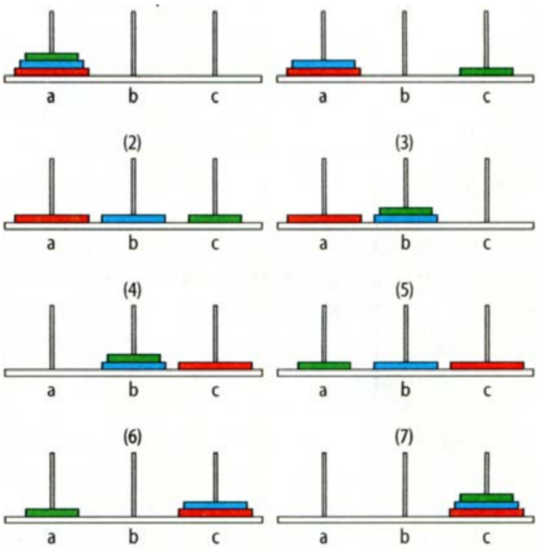



Рисунок 1. Кроки розв'язування головоломки

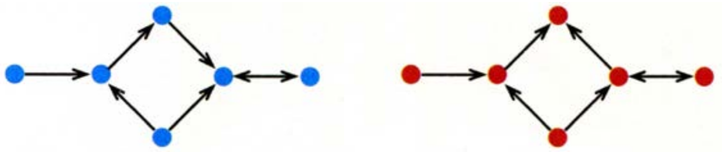
Таблиця 1 демонструє мінімальну кількість кроків, необхідну для розв'язання головоломки в залежності від кількості дисків, що приймають участь у грі.

Таблиця 1. Залежність мінімальної кількості кроків від кількості дисків

| Кількість дисків | Мінімальна кількість кроків |
|---|---|
| 1 | $1 = 2^1 - 1$ |
| 2 | $1 + 1 + 1 = 2^2 - 1$ |
| 3 | $3 + 1 + 3 = 2^3 - 1$ |
| 4 | $7 + 1 + 7 = 2^4 - 1$ |
| … | … |
| 8 | $127 + 1 + 127 = 2^8 - 1$ |
| … | … |
| 10 | $1023 = 2^{10} - 1$ |
| … | … |

| | |
|---|---|
| 64 | $18446744073709551615 = 2^{64} - 1$ |
| … | … |

У світі ігор-головоломок багато задач можна формалізувати у вигляді графів [4] та застосовувати для їх розв’язування відомі інструменти з теорії графів. Щоб побудувати граф до гри Ханойська вежа, потрібно співвідносити одну точку з кожною можливою позицією. Якщо хід дозволений правилами гри, дві точки з’єднують стрілкою. Якщо рух незворотній, то стрілка буде спрямована в одну сторону, якщо зворотній (дозволений), то стрілка буде подвійною. Ключ до розгадки полягає в тому, щоб знайти шлях від початкової точки до кінцевої. Якщо такого шляху не існує, то головоломка не має розв’язку (див. рис. 2).

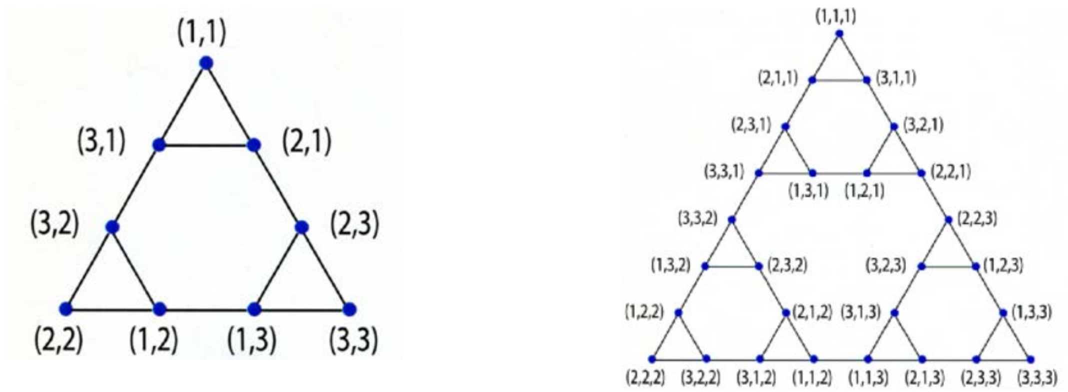


а) б)

Рисунок 2. Загальний вигляд графу, коли головоломка: а) має розв’язок; б) немає розв’язку

У випадку із Ханойською вежею можна помітити, що кожна конфігурація приєднує до себе окрім точки ще й впорядковану послідовність чисел, кількість яких дорівнює кількості дисків. Реалізувати це можна так. Спочатку занумеровуємо стрижні від 1 до 3. Наприклад, лівий стрижень отримує номер 1, середній – 2, правий – 3. Потім до кожної конфігурації долучаємо ряд чисел: перше число – номер стрижня, на який нанизують малий диск; друге – номер стрижня, на який нанизано диск наступного розміру і т.д. Так, наприклад, послідовність (1, 2, 3, 2) задає таку конфігурацію чотирьох дисків: на першому стрижні найменший диск, на другому стрижні диск найбільший та наступний за розміром від найменшого, на третьому стрижні третій за розміром від найменшого диск.

Для Ханойської вежі з двох дисків є дев’ять можливих конфігурацій (рис. 3а), для трьох дисків існує 27 конфігурацій (див. рис. 3б)




а) б)

Рисунок 3. Граф, побудований для головоломки Ханойська вежа: а) для двох дисків, б) для трьох дисків.

Зображуючи ребра графу Ханойської вежі можна помітити, що вони нагадують фрактальний трикутник – утворення трикутників меншого розміру всередині більшого (рис. 4)

Рисунок 4. Фрактальний трикутник

Послідовно нумеруючи 1, 2, 3, 4 і т. д. від меншого до більшого, кожен крок в грі можна подати одним номером – номер диску, що зараз в грі. Таким чином, сім кроків за гри трьома дисками можна подати як послідовність таких номерів: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1. Запишемо можливі номери у двійковій системі числення у зростаючому порядку. Можна помітити, що між двійковим числом та наступним за ним завжди є ще одне число від 0 до 1 в довільній з трьох позицій (див. табл. 2)

Таблиця 2 Застосування двійкової системи числення до ілюстрації розв'язку Ханойської вежі

| **Число в десятковій системі** | **Число в двійковій системі** | **Позиція, яку займає число від 0 до 1** |
|---|---|---|
| 0 | 000 | |
| 1 | 001 | 1 |
| 2 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 1 |
| 4 | 100 | 3 |
| 5 | 101 | 1 |
| 6 | 110 | 2 |
| 7 | 111 | 1 |

Правий стовпчик таблиці є послідовністю ходів в грі. Цей зв'язок з двійковою системою працює не залежно від кількості дисків у грі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Ivan Moscovich, 1000 playthinks: puzzles, paradoxes, illusions & games, Workman Pub., 2001.
2. Личковський Е. І. Вища математика. Теорія наукових досліджень у фармації та медицині: підручник /Е. І. Личковський, П. Л Свердан. – К.: Знання, 2021. – 476 с.
3. Petković, Miodrag (2009). Famous Puzzles of Great Mathematicians. AMS Bookstore. p. 197.
4. Капітонова Ю. В. Основи дискретної математики. Підручник /Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печурін. – К.: НАУКОВА ДУМКА, 2002. – 580 с.



***Туревич Владислав Костянтинович,*** комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, vladturevic547@gmail.com

***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна*** - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна*** - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

***Turevich Vladislav K.,*** communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, vladturevic547@gmail.com

***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com