

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТОЧКИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Розглянуто практичне застосування диференціальних рівнянь для розв'язку задач з теоретичної механіки, доведено раціональність їх використання для спрощення обчислень при дослідженні руху точки та тіл системи.

Ключові слова: диференціальне рівняння, матеріальна точка, рух точки, час, сила.

Abstract

The practical application of differential equations for solving problems in theoretical mechanics is considered, the rationality of their use to simplify calculations in the study of the motion of points and bodies of the system is proved.

Keywords: differential equation, material point, point motion, time, force.

Вступ

Диференціальні рівняння — рівняння, що встановлюють залежність між незалежними змінними, числами (параметрами), невідомими функціями та їхніми похідними. Невідома функція може бути як скалярною, так і векторною. Такі залежності відносяться в різних областях знань: у механіці, фізиці, хімії, біології, економіці та ін. Диференціальні рівняння широко використовуються на практиці, зокрема для опису перехідних процесів, коливань, теплопровідності, деформації балок і пластин, поширення електричного струму у провіднику тощо. У застосуваннях математики часто виникають задачі, в яких залежність одного параметра від іншого є невідомою, але можливо записати вираз для швидкості зміни одного параметра відносно іншого (похідної). У цьому випадку задача зводиться до знаходження функції за її похідною відносно з деяких інших виразів [1].

У випадку одного аргументу диференціальне рівняння називається звичайним; у випадку декількох аргументів — диференціальним рівнянням з частинними похідними. Складнішими є інтегро-диференціальні рівняння.

Порядок диференціального рівняння - найвищий порядок похідної, що входить до рівняння.

Степінь диференціального рівняння - найвищий степінь, до якого піднесено похідну найбільшого порядку n , що входить до рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння порядку n називається функція, що має похідні, до n -ого порядку включно на деякому інтервалі, підставлення якої у рівняння перетворює його у тотожність. Якщо рівняння має розв'язок, то не один, а нескінченну множину; розв'язок може залежати не лише від аргументу, але також від однієї або декількох довільних сталих чи функцій. Якщо розв'язок рівняння отримано у формі неявної функції, то його називають інтегралом рівняння.

Початкові умови або граничні умови - додаткові умови, що накладаються на функцію при розв'язку конкретної задачі, що приводить до диференціального рівняння. За цих умов розв'язок може виявитись єдиним. Розв'язок рівняння, що залежить від довільних сталих, кількість яких дорівнює порядку рівняння і які можуть бути підібраними так, щоб задовольнити будь-яким початковим та граничним умовам, що допускають єдиний розв'язок, називається загальним розв'язком. Частинним розв'язком диференціального рівняння називається будь-який розв'язок, що може бути отриманий із загального при визначених числових значеннях довільних сталих. Довільні сталі, що входять в загальний розв'язок, визначаються з початкових або граничних умов [1,2].

Диференціальне рівняння називається інтегровним в квадратурах, якщо задачу знаходження усіх розв'язків можна звести до обчислення скінченного числа інтегралів від відомих функцій і простих алгебраїчних операцій. Через те, що багато рівнянь не можуть бути виражені через прості функції, тому деякі, рішення, що часто зустрічаються в таких задачах, отримали власні назви, були досліджені їх значення і взаємозв'язок, і тепер вони входять у число спеціальних функцій [2,3].

Спочатку диференціальні рівняння виникли із задач механіки, в яких брали участь координати тіл, їхні швидкості та прискорення, розглянуті як функції від часу, пізніше вони знайшли застосування практично в усіх розділах фізики — такі основні для своїх областей рівняння як рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Ейнштейна у загальній теорії відносності та рівняння Шредінгера у квантовій механіці є диференціальними. Багато моделей з інших наук, таких як біологія, хімія і економіка також описуються різноманітними диференціальними рівняннями. Для багатьох з цих рівнянь, в тому числі практично важливих, наприклад, рівняння Нав'є-Стокса, допоки що не знайдено розв'язку в загальному вигляді. Проте в реальних задачах за допомогою чисельних методів можна знайти їх рішення з будь-якою необхідною точністю.

Дослідження

Розглянемо рух матеріальної точки масою m під дією сили F , що може залежати від часу, швидкості, відстані (рис. 1) $F = F(r, t, v)$, де F – сила, r – відстань, t – час, v – швидкість.

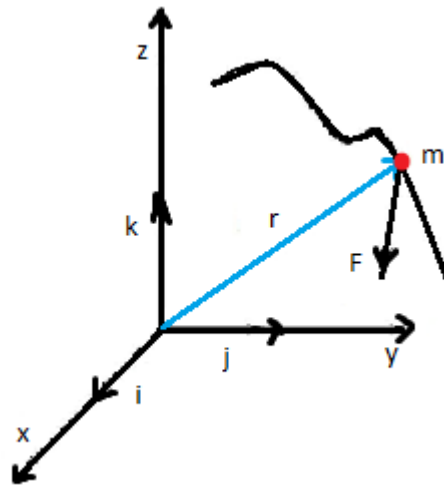


Рис. 1. Графік руху матеріальної точки масою m під дією сили F

За другим законом Ньютона виводимо значення сили F

$$a = \frac{F}{m}$$

Тоді значення сили F

$$F = a * m$$

Заміняємо прискорення диференціальним рівнянням прискорення – a , отримуємо:

$$a = \frac{d^2 * r}{d * t^2}$$

$$F = a * m$$

Отримане диференціальне рівняння у векторній формі, використовується для визначення швидкості руху точки:

$$F = m * \frac{d^2 * r}{d * t^2}$$

Висновки

Прискорення залежить від часу, відстані та швидкості і є другою похідною або залежністю від часу. В свою чергу, сила залежить від прискорення та маси і показана на малюнку як результат похідної – центром є сама точка.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Копась. – Електронні текстові дані (1 файл: 2504 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка: [підручник]/ М. А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. – ISBN 966-575-184-0.
3. Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О. П77 Теоретична механіка. Динаміка матеріальної системи. Розрахунково – графічні та контрольні завдання. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 78с.

Стружко Ірина Геннадіївна – студентка групи 2ЕСМ-21б, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: irastruzhko11@gmail.com
Науковий керівник: **Віштак Інна Вікторівна** – канд. техн. наук, доцент кафедри опору матеріалів, теоретичної механіки та інженерної графіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, , e-mail: vishtakiv@vntu.edu.ua

Struzhko Iryna H. - student of group 2ESM-21b, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: irastruzhko11@gmail.com
Scientific adviser: **Vishtak Inna. V.** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Strength of Materials, Theoretical Mechanics and Engineering Graphics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: vishtakiv@vntu.edu.ua