УДК 004.925.3

О. Н. Романюк
О. В. Романюк
О. О. Яковенко

МЕТОД СПРОЩЕНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРІВ ДЛЯ ЗАДАЧ РЕНДЕРИНГУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Розроблено метод прискореного обчислення одиничних векторів нормалей для задач рендерингу. Метод використовує квадратичну інтерполяцію. Отримано аналітичні вирази для визначення векторів.
Ключові слова: комп'ютерна графіка, вектори, нормалізація, рендеринг, поліноми Чебішева.

Abstract
A method for accelerated calculation of unit vectors of normals for rendering problems has been developed. The method uses quadratic interpolation. Analytical expressions for determining vectors are obtained.
Keywords: computer graphics, vectors, normalization, rendering, Chebyshev polynomials.

Вступ

Розрахунок моделей освітлення [1, 2] передбачає нормалізацію векторів, що вимагає достатньо великих обчислювальних витрат. Ураховуючи, що дистрибутивна функція й нормалізовані вектори [1, 2] обчислюються для кожної точки поверхні, то продуктивність формування графічних сцен у значній мірі визначається саме реалізацією зазначених процедур. Тому актуальною задачею є розробка методів спрощеного розрахунку векторів для задач рендерингу.

Розробка методу

Нормалізація векторів вимагає великих обчислювальних затрат. Для спрощення розрахунків використаємо квадратичну інтерполяцію векторів. При цьому будемо вважати, що апріорно задані нормалізовані вектори в початковій та кінцевій точці рядка растеризації (РР). Знайдемо проміжні вектори за виразом

$$\vec{N}_{i,t} = \vec{G}_i \cdot t^2 + \vec{P}_i \cdot t + \vec{Q}_i . \tag{1}$$

Введемо позначення: $\vec{N}_{i,l}, \vec{N}_{i,p}, \vec{N}_{i,c}$ – відповідно вектори у початковій, кінцевій та середній точках РР трикутника. Введемо параметричну зміну t.

При мулевому значенні $t\,(t=0)$ $\vec{N}_{i,l} = \vec{Q}_i$. У кінцевій точці РР растеризації $t=1$, тому $\vec{N}_{i,p} = \vec{G}_i + \vec{P}_i + \vec{Q}_i$.

У середній точці РР $t = 1/2$, то $N_{i,c} = \dfrac{\vec{G}_i}{4} + \dfrac{\vec{P}_i}{2} + \vec{Q}_i$.

Отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} \vec{N}_{i,l} = \vec{Q}_i , \\ \vec{N}_{i,p} = \vec{G}_i + \vec{P}_i + \vec{Q}_i , \\ N_{i,c} = \dfrac{\vec{G}_i}{4} + \dfrac{\vec{P}_i}{2} + \vec{Q}_i , \end{cases}$$

Розв'язком такої системи є:

$$\vec{G}_i = 2 \cdot \vec{N}_{i,p} - 4 \cdot \vec{N}_{i,c} + 2 \cdot \vec{N}_{i,l}, \quad \vec{P}_i = 4 \cdot \vec{N}_{i,c} - \vec{N}_{i,p} - 3 \cdot \vec{N}_{i,l}, \quad \vec{Q}_i = \vec{N}_{i,l}.$$

Нехай $h_i = 1/\sqrt{2(1+\vec{N}_{i,l} \cdot \vec{N}_{i,p})}$. Тоді:

$$\vec{N}_{i,c} = h_i(\vec{N}_{i,l} + \vec{N}_{i,p}),$$

$$\vec{G}_i = 2(1-2 \cdot h) \cdot (\vec{N}_{i,l} + \vec{N}_{i,p}), \quad \vec{P}_i = (4h-3) \cdot (\vec{N}_{i,l} + \vec{N}_{i,p}) + 2 \cdot \vec{N}_{i,p}, \quad \vec{Q}_i = \vec{N}_{i,l}.$$

З останніх формул визначаємо: $\vec{P}_i = (\vec{N}_{i,p} - \vec{N}_{i,l}) - \vec{G}_i$.

Нехай $r = \vec{N}_{i,l} \cdot \vec{N}_{i,p} = cos\psi_i$. ψ_i – кут між векторами $\vec{N}_{i,l}$ і $\vec{N}_{i,p}$.

Апроксимуємо вираз $1/\sqrt{2(1+r)}$ поліномом Чебішева другої степені. Отримуємо $1/\sqrt{2(1+r)} \approx 0{,}103r^2 - 0{,}306r + 0{,}705$.

Аналіз показав, що Δ_{max} не перевищує 0,002. На рис. 1 зображено графік відносної похибки апроксимації.

Отриманий вираз дозволяє зменшити час розрахунку вектора в середній точці РР у понад 2,5 рази.

Зрозуміло, що збільшити точність визначення $1/\sqrt{2(1+r)}$ можна за рахунок використання поліномів Чебішева вищого порядку. Зокрема, для третьої степені $1/\sqrt{2(1+r)} \approx -0{,}059r^3 + 0{,}193r^2 - 0{,}341r + 0{,}707$. У цьому випадку $\Delta_{max} \le 0{,}00038$.

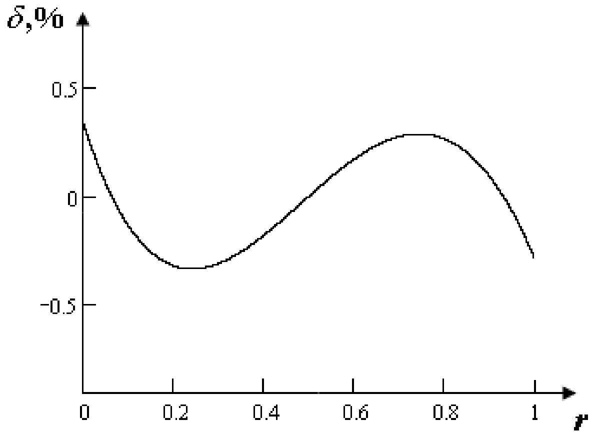

Рис.1 δ апроксимації виразу $\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}$ поліномом Чебішева

Знайдемо $|\Delta_{max}|$ використанні формули (1) можна визначити за виразом [1]

$$|\Delta_{max}| \le \frac{M'''_{max} \cdot (t-t_l) \cdot (t-t_c) \cdot (t-t_p)}{6},$$

де t_l, t_c, t_p – значення параметричної змінної в початковій, середній і кінцевій точці РР, M''' – похідна від функції.

Визначимо похідну третьої степені для виразу $\vec{N}(t)=\vec{N}_l \dfrac{sin((1-t)\psi)}{sin\psi}+\vec{N}_p \dfrac{sin(t\psi)}{sin\psi}$.

Остання формула дає можливість знайти вектор в точці t ($t\in[0,1]$, ψ – кут між векторами $\vec{N}_l$ і $\vec{N}_p$).

$$\vec{N}'''(t)=\frac{(\vec{N}_l cos(1-t)\cdot\psi)-\vec{N}_p cos(t\cdot\psi))\cdot\psi^3}{sin\psi}.$$

Враховуючи, що $t_l=0, t_c=1/2,\ t_p=1$

$$|\Delta_{max}|\le max\left(\frac{(\vec{N}_l cos(1-t)\cdot\psi)-\vec{N}_p cos(t\cdot\psi))\cdot\psi^3}{sin\psi}\right)\frac{t\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot(t-1)}{6}.$$

Вираз має два множники. Визначимо екстремуми першого й другого множника.

Знайдемо похідні від множників і прирівняємо їх до нуля.

Максимальне по модулю значення третьої похідної дорівнює $\dfrac{\psi^3\cdot\sqrt{2}}{sin\psi}$, а виразу $\dfrac{t\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot(t-1)}{6}$ $-0,008.$

$\dfrac{\psi^3\cdot\sqrt{2}}{sin\psi}$ зростає монотонно. Якщо $\psi=\pi/2$, її значення менше 5,5. Тому $|\Delta_{max}|\le 0,044$.

Максимальна абсолютна похибка при визначені одиничного вектору буде дорівнювати

$$\Delta_в=\left|1-\sqrt{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2+(z+\Delta z)^2}\right|.$$

Тому

$$\Delta_в\le 1-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)+2|\Delta_{max}|(x+y+z)}$$

$|x|+|y|+|z|)\le 1,5$, тому $\Delta_в\le 1-\sqrt{1+3\cdot\Delta}=0,064.$

Експериментальні дослідження показали, що при реалізації на програмному рівні час визначення векторів для середнього трикутника зменшився в 2,8 разів.

Нехай $t=t+\Delta t,$ тоді

$$\vec{N}_{i,t+\Delta t}=\vec{G}_i\cdot(t+\Delta t)^2+\vec{P}_i\cdot(t+\Delta t)+\vec{Q}_i=\vec{N}_{i,t}+\Delta t\cdot(\vec{G}_i(2\cdot t+\Delta t)+\vec{P}_i).$$

Введемо позначення $W_{i,t}=\Delta t\cdot(\vec{G}_i(2\cdot t+\Delta t)+\vec{P}_i)$. Тоді

$$W_{i,t+\Delta t}=\Delta t\cdot(\vec{G}_i(2\cdot(t+\Delta t)+\Delta t)+\vec{P}_i)=\Delta t\cdot(G_i(2\cdot t+\Delta)+P_i)+2G_i\cdot\Delta t^2$$

Можна записати. що

$$W_{i,t+\Delta t} = W_{i,t} + 2G_i \cdot \Delta t^2 .$$

$2G_i \cdot \Delta t^2$ не змінюється для РР трикутник. Тому в циклі визначення одиничних векторів використовуються мікрооперації накопичуючого додавання.

Експериментальні дослідження показали, що час визначення векторів для середнього трикутника зменшився в $3,6$ разів.

Висновок

Розроблено метод визначення одиничних векторів, особливість якого полягає в використанні для апроксимації поліному другого степеня.

Отримані вирази для визначення векторів нормалей, які мають порівняно з існуючими меншу обчислювальну складність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Романюк О. Н.Чорний А. В. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об’єктів. Монографія. ─Вінниця: УНІВЕСУМ-Вінниця ─2006. ─190 с.
2. Романюк О. Н. Класифікація дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхні. Наукові праці Донецького національного технічного університету. Сер. : Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. - 2008. - Вип. 9. - С. 145-151.

Романюк Олександр Никифорович – д.т.н, професор, завідуючий кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: rom8591@gmail.com

Романюк Оксана Володимирівна – к.т.н., доцент кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: romaniukoksanav@gmail.com

Яковенко Олеся Олегівна – студентка групи 2ПІ-16б, факультет інформаційних технологій і комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: olesjayakovenko@gmail.com

Romanyuk Alexander Nikiforovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Software Department, Vinnitsa National Technical University, Vinnytsia, email: rom8591@gmail.com

Romanyuk Oksana Volodymyrivna – Cand. Sc., Assistant Professor of the Software Chair, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: romaniukoksanav@gmail.com

Yakovenko Olesia Olehivna – student of 2PE-16b, Faculty for Information Technologies and Computer Engineering, Vinnitsia National Technical University, Vinnitsya, e-mail: olesjayakovenko@gmail.com