

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ЦЕГЛИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Запропоновано математичну модель процесу сушіння цегли, яка описує зміну температури і вологовмісту на стадіях з постійною і спадаючою швидкостями сушіння.

Ключові слова: цегла, сушіння, математична модель, стадія постійної швидкості сушіння, стадія спадаючої швидкості сушіння.

Abstract

A mathematical model of drying bricks, which describes the change in temperature and in-lohovmistu on stage with constant and decreasing speed drying.

Keywords: brick, drying, mathematical model, constant speed drying stage, the stage of flowing speed drying.

Вступ

Сушіння є одним з найбільш енергоємних процесів в промисловості. Воно значно підвищує вартість готової продукції внаслідок тривалості процесу і великих теплових втрат в навколишнє середовище.

Основну увагу при інтенсифікації процесу сушіння приділяють вибору оптимальних тепловологічних режимів процесу та швидкості сушильного агента.

Математична модель процесів сушіння базується на одночасному розгляді рівнянь теплопедачі, Фіка та гідродинаміки капілярної системи сировини. Сушіння розглядають як суперпозицію трьох процесів: конвективної дифузії, дифузії в обмежених умовах капілярів і десорбції вологи [1]. Одночасний вплив відповідних рушійних сил визначає розвиток теплових, масообмінних і гідродинамічних процесів. Загальна задача моделювання процесів тепломасоперенесення під час процесу сушіння має дві складові.

Перша складова (зовнішня задача) описує період постійної швидкості сушіння, коли випаровування вологи можна вважати адіабатним і вона знаходиться на поверхні сировини у вільному стані. Така волога випаровується з поверхні за рахунок теплоти сушильного агента в результаті обдування ним сировини.

Друга складова (внутрішня задача) описує період сушіння зі спадаючою швидкістю, коли фронт випаровування заглиблюється в сировину.

Математична модель

Запишемо рівняння математичної моделі для одиничної цеглини згідно з Рис.1. Початок системи координат розташуємо в довільній точці на площині симетрії цеглини. Вісь координати x направимо перпендикулярно до поверхні цеглини з найбільшою площею. Координатну площину (y, z) розташуємо перпендикулярно до осі x . В початковий момент сушіння прийmemo $\tau = 0$.

Стан сировини під час сушіння описується двома основними змінними: температурою T і вологовмістом u . Зміна температури і вологовмісту в процесі сушіння описується системою диференціальних рівнянь тепло- і масопереносу, поданих в [2].

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = D\nabla u + D\delta_m \cdot \nabla T, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla T + \frac{\varepsilon r}{c} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (1)$$

де ∇ – оператор Лапласа;
 a – коефіцієнт теплопровідності, м²/с;
 D – коефіцієнт молекулярної дифузії, м²/с;
 δ_m – термоградієнтний коефіцієнт;
 ε – коефіцієнт фазового перетворення;
 r – питома теплота пароутворення, кДж/кг;
 c – масова теплоємність, кДж/(кг·К).

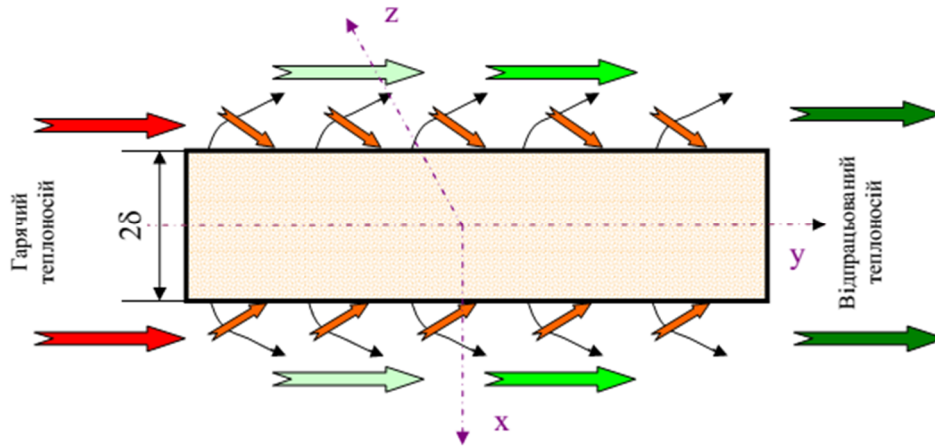


Рис.1 Схема конвективного сушіння цеглини

Оскільки волога переміщується в цеглині переважно вздовж осі x і випаровується в сушильний агент, а перенесення вологи по осях y і z незначне, прийmemo, що температура і вологовміст не залежать від координат y і z . Тоді рівняння (1) набувають вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\delta_m \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon r}{c} \frac{\partial u}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (2)$$

Врахуємо залежність коефіцієнтів від часу. Тоді система рівнянь переписеться так

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = D(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) + D(\tau)\delta_m(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, \tau), \\ \frac{\partial T}{\partial \tau}(x, \tau) = a(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, \tau) + \frac{\varepsilon(x, \tau)r}{c(\tau)} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau). \end{cases} \quad (3)$$

Верхнє рівняння системи можна переписати в еквівалентному вигляді, з врахуванням, що $\varepsilon(x, \tau) \neq 1$ (рівність означає, що волога з поверхні цеглини не випаровується).

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{D(\tau)}{1 - \varepsilon(x, \tau)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) + \frac{D(\tau)\delta_m(\tau)}{1 - \varepsilon(x, \tau)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, \tau). \quad (4)$$

Запишемо умови однозначності.

В процесі сушіння змінюються теплофізичні характеристики сировини, прийmemo, що вони лінійно залежать від температури.

$$\begin{aligned} a &= a_0(u) + k_a T, \\ \lambda &= \lambda_0(u) + k_\lambda T, \\ c &= c_0(u) + k_c T, \end{aligned} \quad (5)$$

де коефіцієнти $a_0, k_a, \lambda_0, k_\lambda, c_0, k_c$ набувають відповідних значень для кожної конкретної сировини.

В момент початку сушіння ($\tau = 0$) вважатимемо температуру і вологовміст сталими.

$$T(x, 0) \equiv T_0, \quad u(x, 0) \equiv u_0. \quad (6)$$

Вважаючи, що площа торця цеглини набагато менша від фронтальної площі, граничні умови запишемо для $x \pm \delta$, тобто фактично розглядатимемо задачу для нескінченної пластини товщиною 2δ .

Оскільки ефект бародифузії і термовологопровідності стає помітним тільки за температур більших від 100°C [2], знехтуємо їх вкладом і запишемо граничні умови третього роду для рівняння масоперенесення

$$-\lambda_m(\delta, \tau) \frac{\partial u}{\partial x}(\delta, \tau) = \beta(\delta, \tau) \frac{\rho_s \rho_w (u(\delta, \tau) + 1)}{\rho_w + \rho_s u(\delta, \tau)} (u(\delta, \tau) - d_{cp}), \quad (7)$$

де λ_m – коефіцієнт масопровідності, $(\text{кж}/(\text{м}\cdot\text{с}))$;

β – коефіцієнт масовіддачі, $(\text{м}/\text{с})$;

ρ_w і ρ_s – густина води і абсолютно сухої речовини відповідно, $(\text{кг}/\text{м}^3)$;

d_{cp} – вологовміст оточуючого середовища, $(\text{кг}/\text{кг})$.

З міркувань симетрії отримаємо «внутрішню» граничну умову

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, \tau) \equiv 0. \quad (8)$$

Аналогічно запишемо граничні умови для рівняння теплопередачі

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(\delta, \tau) + \alpha (T(\delta, \tau) - T_{cp}) = \\ = \beta(\delta, \tau) r \frac{\rho_s \rho_w (u(\delta, \tau) + 1)}{\rho_w + \rho_s u(\delta, \tau)} \varepsilon(\delta, \tau) (u(\delta, \tau) - d_{cp}), \end{aligned} \quad (9)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $(\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}))$;

α – коефіцієнт тепловіддачі, $(\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К}))$.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, \tau) \equiv 0. \quad (10)$$

Конкретизуємо вигляд рівнянь на різних стадіях процесу сушіння.

На першій стадії сушіння (сушіння з постійною швидкістю)

Враховуючи це, а також початкові і граничні умови, задачу можна розв'язати чисельно, розклавши в ряд $T(x, \tau)$ і $u(x, \tau)$, відкинувши складові зі степенями більше 2 як малі, і в силу симетрії задачі по x (пластина симетрична), отримаємо

$$\begin{cases} T(x, \tau) \approx T_2(x, \tau) = T_0(\tau) + T_2(\tau)x^2 \\ u(x, \tau) \approx u_2(x, \tau) = u_0(\tau) + u_2(\tau)x^2 \end{cases} \quad (11)$$

Тоді рівняння теплопереносу з початковими умовами матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial T_0}{\partial \tau}(\tau) + \frac{\partial T_2}{\partial \tau}(\tau)x^2 = 2a(\tau)(T_2(\tau) + 6T_4(\tau)x^2), \\ T_0(0) + T_2(0)x^2 \equiv T_0. \end{cases}$$

Рівняння масопереносу

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(\tau) + \frac{\partial u_2}{\partial \tau}(\tau)x^2 = \frac{2D(\tau)}{1 - \varepsilon(x, \tau)} (u_2(\tau) + 6u_4(\tau)x^2) + \\ + \frac{2D(\tau)\delta_m(\tau)}{1 - \varepsilon(x, \tau)} (T_2(\tau) + 6T_4(\tau)x^2), \\ u_0(0) + u_2(0)x^2 \equiv u_0. \end{cases}$$

В обидві системи необхідно додати також граничні умови (8) і (7) відповідно.

Прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x і з допущенням, що $\varepsilon(x, \tau) = 0$ дає системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial T_0}{\partial \tau}(\tau) = 2a(\tau)T_2(\tau), \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau}(\tau) = 12a(\tau)T_4(\tau). \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(\tau) = 2D(\tau)u_2(\tau) + 2D(\tau)\delta_m(\tau)T_2(\tau), \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau}(\tau) = 12D(\tau)u_4(\tau) + 12D(\tau)\delta_m(\tau)T_4(\tau). \end{cases} \quad (13)$$

Визначимося з коефіцієнтами. За час стадії сушіння з постійною швидкістю збільшення коефіцієнта температуропровідності a за рахунок зростання температури частково компенсується зменшенням за рахунок зниження вологовмісту. Тому для першої стадії прийемо значення цього коефіцієнта сталим і рівним $a = 6,94 \cdot 10^{-7} \text{ (м}^2/\text{с)}$ [4]. Аналогічно теплоємність прийемо рівною $2500 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Зміна коефіцієнта теплопровідності (який враховується в граничних умовах рівняння теплопередачі) на першій стадії сушіння не перевищує 2-3%, тому прийемо цей коефіцієнт рівним $\lambda = 2,0 \text{ (Вт/м}\cdot\text{К)}$. Значення коефіцієнта молекулярної дифузії $D = 2,21 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^2/\text{с)}$ вважатимемо сталими. Густинаологи ρ_w прийемо рівною густині води. Знаючи густину продукта при початковій вологості 86% і кінцевій 8%, знайдемо густину абсолютно сухої речовини $\rho_s = 1350 \text{ кг/м}^3$. З [2] відомо, що за високих значень вологовмісту термоградієнтний коефіцієнт δ_m малий, тому на першій стадії сушіння ним знехтуємо.

Оскільки на першій стадії випаровування адиабатне, то значення T_{cp} і u_{cp} постійні, а $T_{cp} = T_m$, де T_m – температура мокрого термометра.

На другій стадії сушіння температура зростає, поки не вирівняється по перерізу цеглини. Тоді ліва частина рівняння (1) тотожно рівна 0. Підставляючи в рівняння (2) і в граничні умови відомі значення констант задачу можна вирішити чисельно. При цьому початкові умови для рівняння другого періоду сушіння впливають з розв'язку рівняння для першого періоду.

В кінці другого періоду температура постійна і дорівнює температурі сухого термометра сушильного агента, а задача зводиться до побудови функції вологовмісту. Оскільки температура

вирівнюється по всій товщині, складова $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ з рівняння масопереносу пропаде, а рівняння набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \varepsilon(x, \tau) = D(\tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) + \varepsilon(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau). \quad (14)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{D(\tau)}{1 - \varepsilon(x, \tau)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau). \quad (15)$$

Вважатимемо, що $\varepsilon(x, \tau) = 0,3$. Коефіцієнт $\frac{D(\tau)}{1 - \varepsilon(x, \tau)} = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2/\text{с)}$ позначимо A .

Початкові умови набудуть вигляду

$$u(x, \tau_0) = C_0 + C_2 x^2, \quad (16)$$

де C_0 і C_2 можна знайти з середнього значення $\bar{u}(\tau_0)$, визначеного експериментально.

Коефіцієнти масопровідності $\lambda_m(\delta, \tau)$ і масовіддачі $\beta(\delta, \tau)$ вважатимемо константами і візьмемо для них значення: $\lambda_m(\delta, \tau) = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/(м}\cdot\text{с))}$, $\beta(\delta, \tau) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ (м/с)}$. Тоді граничні умови матимуть вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\delta, \tau) = B \cdot u(\delta, \tau), \quad (17)$$

де $B = \frac{\beta \rho_w}{\lambda_m} = 0,12 \frac{1}{\text{м}}$.

Запишемо задачу масоперенесення за зроблених допущень

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau), \\ u(x, \tau_0) = C_0 + C_2 x^2, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\delta, \tau) = B \cdot u(\delta, \tau). \end{cases} \quad (18)$$

Система рівнянь (18) є крайовою задачею третього роду для рівняння теплопровідності. Скористаємось окремим випадком її розв'язку, справедливим для $Bi \gg 1$.

$$u(x, \tau) = K_1 \exp(-A\mu^2\tau) \cos \mu x + K_0, \quad (19)$$

де K_1, K_0, μ – константи, які можна визначити з початкових і граничних умов.

Для першої стадії процесу сушіння чисельний розв'язок за допомогою математичного пакета Maple 12 систем рівнянь (12) і (13) дає часову залежність функцій температури і вологовмісту близьку до лінійної.

Для перевірки адекватності математичної моделі співставимо її результати з експериментальними, описаними в [5].

Для другої стадії, підставляючи значення констант в систему (18) можна побудувати криву сушіння, подану на рис. 2 разом з лінійною апроксимацією результатів експерименту [5].

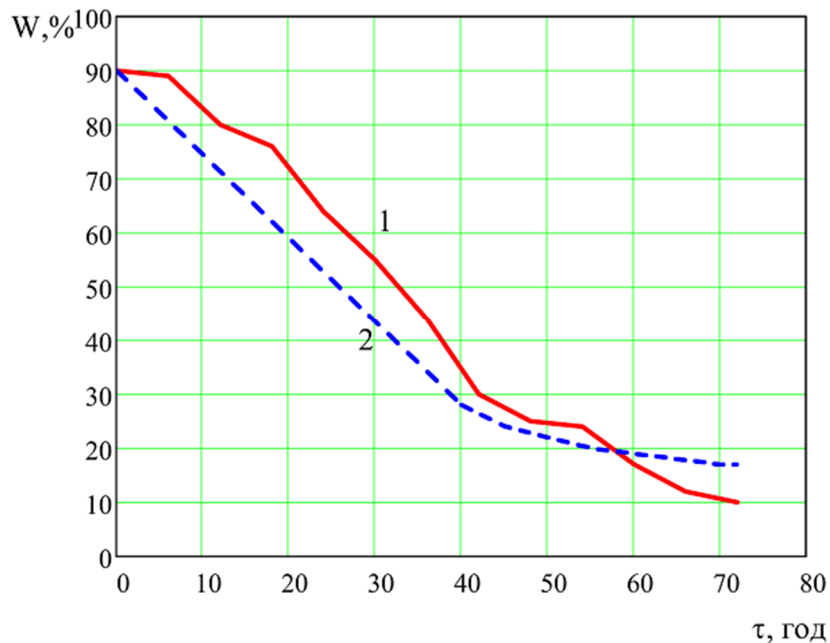


Рис.2 – Функція зміни вологовмісту цегли в процесі сушіння
1 – експериментальні дані [5], 2 – результати розрахунків

Висновки

Похибка математичної моделі накопичується в кінці процесу сушіння. Причиною цього є те, що модель враховує не всі фактори, що впливають на процес (наприклад механізм конвективного перенесення теплоти від сушильного агента на поверхню сировини) і, крім того, має суттєві допущення. На першій стадії процесу і в першій половині другого модель забезпечує задовільну точність.

Середня відносна похибка всього процесу не перевищує 20% і показує добре співпадання розрахункових значень з експериментальними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурдо О. Г. Наномасштабные эффекты в пищевых технологиях // О. Г. Бурдо // Инженерно-физический журнал. – т. 78. – №2. С. 88-93.
2. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1968. – 472с.
3. Чаудхари Р. Р. Комплексная автоматизация технологического процесса производства керамического кирпича / Р.Р. Чаудхари // Автоматизация и управление в технических системах. – 2012. – № 1 – Режим доступа: <http://auts.esrae.ru/pdf/2012/1/6.pdf> – Дата обращения 1.10.16 – Название с экрана.
4. Золокерамические материалы. – Режим доступа <http://stroj-archive.ru/zolokeramicheskie-materialy/640-eksperimentalnoe-issledovanie-teplo-i-massoobmena-v-processe-obzhiga-stenovyh-izdeliy-zolokeram.html> – Дата обращения 1.10.16 – Название с экрана.
5. Уразбахтин Ф. А. Экспериментальное определение параметров сушки керамического кирпича-сырца / Ф. А. Уразбахтин, А. Р. Хабиров, М. А. Святский // Строительные материалы. – 2008. – №4, С. 42-45.
6. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432с.

Олександр Юрійович Співак – канд. техн. наук, доцент кафедри теплоенергетики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: spivak000@gmail.com;

Ірина Валеріївна Фінік – студентка групи ТЕ-146, факультет будівництва теплоенергетики та газопостачання, Вінницький національний технічний університет;

Павло Сергійович Коба – студент групи ТЕ-146, факультет будівництва теплоенергетики та газопостачання, Вінницький національний технічний університет.

Olexandr Y. Spivak – Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of Department of Thermal Power Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : spivak000@gmail.com;

Irina V. Finyk – Department of Building Heating and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University;

Pavlo S. Koba – Department of Building Heating and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University.