

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗГИНУ ПЛАСТИН ЖОРСТКИХ ДОРОЖНІХ ТА АЕРОДРОМНИХ ПОКРИТТІВ

Національний транспортний університет

Анотація

У матеріалах доповіді розглядаються теоретичні основи моделювання згину пластин жорстких дорожніх та аеродромних покриттів. Згин є одним з основних видів механічного навантаження, якому піддаються пластини під час експлуатації дорожніх та аеродромних покриттів. Розуміння процесу згину та його впливу на міцність та довговічність покриття є важливим для розробки оптимальних конструкцій та матеріалів. Представлені основні аспекти пов'язані з методами проектування цементобетонних перекриттів, надано теорію згину пластин, дано аналіз теоретичних рішень та даних отриманих з використанням комп'ютерних технологій в програмі Ansys.

Ключові слова: жорсткий дорожній одяг, перехідний коефіцієнт, пластина, прогин, згинальний момент.

Abstract

The paper discusses the theoretical foundations of modeling the bending of plates in rigid road and airport pavements. Bending is one of the main types of mechanical loading that plates are subjected to during the operation of road and airport pavements. Understanding the bending process and its impact on the strength and durability of the pavement is important for the development of optimal designs and materials. The main aspects related to the design methods of reinforced concrete slabs are presented, the theory of plate bending is provided, and an analysis of theoretical solutions and data obtained using computer technology in the Ansys program is given.

Key words: rigid pavement, transition factor, slab, deflection, bending moment.

Вступ

Інноваційний розвиток дорожньої галузі повинен бути спрямований на досягнення нових споживчих властивостей доріг, а не на мінімальний показник витрат при русі по ним. Відповідно до забезпечення більшої надійності існуючих дорожніх покриттів навіть при збільшених навантаженнях на покриття та відновлення діючих автомобільних доріг з асфальбетонним покриттям використовують технологію ремонту існуючих покриттів цементобетоном. Тому важливо мати розрахунковий апарат для оцінки напружено-деформованого стану жорстких покриттів.

Основні результати

Розглянемо пластину товщиною h (рисунок), віднесено до декартової системи координат x, y, z . Площину x, y сумістимо з серединною площиною пластини. Теорія згину пластин базується на гіпотезах Кірхгофа. Згідно з першою з них вважатимемо, що відрізки нормальні до серединної площини лишаються нормальними до серединної площини і не змінюють своєї довжини. Друга гіпотеза постулює, що шари пластини паралельні до серединної площини, не спричиняють тиску один на одного. Що означає, що ми нехтуємо нормальним напруженням σ_{zz} у порівнянні з іншими компонентами. Ці гіпотези дозволяють звести тривимірну задачу розрахунку пластини до двовимірної в якій всі величини, що характеризують напружено-деформований стан, виражаються через одну функцію координат – прогин $w(x, y)$.

Якщо прийняти, що прогини пластини малі у порівнянні з її товщиною (скажімо, $\frac{w}{h} < \frac{1}{5}$), тоді можна знехтувати деформаціями серединної площини. У цьому випадку переміщення u_x та u_y точок пластини змінюються по товщині пропорційно координаті z :

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1)$$

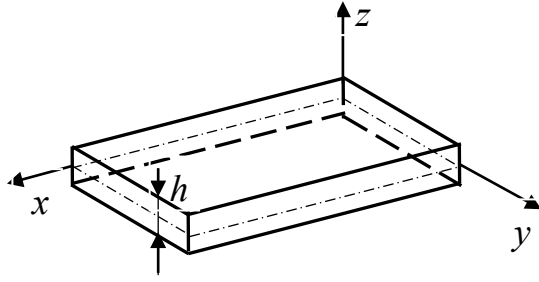


Рисунок – Схема пластини в декартовій системі координат

Деформації шарів паралельних серединній площині, визначаються формулами:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

де ε_{xx} , ε_{yy} – нормальні деформації, γ_{xy} – деформація зсуву. Решта деформацій виявляються рівними нулю:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (3)$$

Шари пластини, які є паралельними до серединній площини, знаходяться в умовах плоского напруженого стану з напруженнями σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} . Їхні результуючі по товщині зводяться до погонних згинаючих M_x , M_y та крутного $M_{xy} = M_{yx}$ моментів, які зв'язані $w(x, y)$ наступними співвідношеннями:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

$$\text{де } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (5)$$

– вигиниста жорсткість (E , μ – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона пластини).

Через M_x , M_y та M_{xy} напруження виражаються наступним чином:

$$\sigma_{xx} = \frac{12M_x}{h^3} z; \quad \sigma_{yy} = \frac{12M_y}{h^3} z; \quad \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z; \quad (6)$$

Крім цих основних напружень в перерізах пластини площинами $x = const$ та $y = const$ виникають також поперечні тангенціальні напруження σ_{xz} ; σ_{yz} . Їхні рівнодійні по товщині пластини являють собою погонні перерізуючі сили Q_x ; Q_y , які виражаються через $w(x, y)$ за допомогою формул:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (7)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. А самі напруження можуть бути вираховані за формулами:

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right); \quad \sigma_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right). \quad (8)$$

Функція $w(x, y)$ повинна задовольняти диференціальному рівнянню четвертого порядку у частинних похідних

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p(x, y) \quad (9)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y) \quad (10)$$

тут $p(x, y)$ – поперечне навантаження на пластину.

Розв'язок рівняння (10) слід підпорядкувати граничним умовам. Будемо розглядати випадок вільних країв пластини:

$$\text{при } x = \text{const} \quad M_x = 0, \quad Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0;$$

$$\text{при } y = \text{const} \quad M_y = 0, \quad Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

тут Q_x^* та Q_y^* так звані узагальнюючі перерізуючі сили в сенсі Кірхгофа.

Аналітичний розв'язок рівняння (10) існує лише для певних граничних умов. Для наших умов необхідним є використання чисельних методів. Практика показує, що безпосереднє застосування чисельних методів (скажімо методу скінченних різниць) до рівнянь порядку вищого за другий призводить до значних проблем (не стійкість обчислень, крайові ефекти та інш.). У цьому випадку використовуються варіаційні принципи, знаходження наближеного розв'язку рівняння замінюється знаходженням наближеного значення стаціонарності енергетичного функціоналу.

Знайдемо вираз потенційної енергії згину пластини через функцію $w(x, y)$:

$$U = \int_{\tau} W d\tau \quad (11)$$

тут τ – об'єм тіла; W – питома потенціальна енергія деформації:

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} + \gamma_{xy} \sigma_{xy} + \gamma_{xz} \sigma_{xz} + \gamma_{yz} \sigma_{yz}) \quad (12)$$

Стосовно згину пластини, коли $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; $\sigma_{zz} = 0$, рівняння для W має більш простий вигляд:

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \gamma_{xy} \sigma_{xy}) \quad (13)$$

Якщо підставити у це рівняння значення з (2) та з (6), будемо мати $W = -\frac{6z^2}{h^3} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$. Якщо представити у формулі (13) $d\tau$ у вигляді

добутку $d\tau = z d\omega$, де ω – площа пластини у плані, та виконуючи інтегрування по координаті z ,

отримаємо, що $U = -\frac{1}{2} \iint_{\omega} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) d\omega$. Підстановка співвідношень (4),

дає $U = -\frac{1}{2} \iint_{\omega} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] d\omega$.

Розкриємо тут дужки, додамо та віднімемо у квадратних дужках вираз $2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Це дозволить нам записати отриманий інтеграл у більш компактному вигляді

$$U = -\frac{1}{2} \iint_{\omega} D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\omega. \quad (14)$$

Можна показати, що для випадку коли контур пластини жорстко закріплений, або контур окреслений прямими лініями та вільно опертий, інтеграл $U = \iint_{\omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\omega$

дорівнює нулю. Отже, для пластини постійної жорсткості, вираз для потенціальної енергії у цих випадках можна записати у вигляді:

$$U = \frac{D}{2} \iint_{\omega} (\nabla^2 w)^2 d\omega. \quad (15)$$

Випишемо також рівняння для потенціалу Π зовнішніх сил. При дії розподіленого по поверхні тиску $p(x, y)$ будемо мати

$$\Pi = -\int_{\omega} p \omega dx dy. \quad (16)$$

При дії зосереджених сил P_i , нормальних до площини пластини і зосереджених моментів M_i

$$\Pi = -\sum_1^n P_i w_i - \sum_1^m M_i \varphi_i. \quad (17)$$

тут w_i прогин у точці прикладання i -тої сили; φ_i – кут повороту нормалі у точці прикладання i -того моменту; n та m – кількість сил та моментів відповідно.

Повна потенціальна енергія зігнутої пластини

$$V = U + \Pi. \quad (18)$$

Для наближених розрахунків можна скористатися методом Рітца. У цьому випадку наближене значення функції $w(x, y)$ будемо шукати у вигляді

$$w(x, y) \approx \tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, y). \quad (19)$$

Тут ψ_i – система базисних функцій, які задані наперед. Кожна з функцій повинна задовольняти геометричним граничним умовам. Коефіцієнти c_i визначаються виходячи з умови мінімуму потенціальної енергії (18). Виведемо рівняння для знаходження c_i . Підставимо (19) у (14), (16) та (18):

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\omega} D \left\{ \left(\sum_1^n c_i \nabla^2 \psi_i \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} - \left(\sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\omega - \int_{\omega} p \sum_1^n c_i \psi_i d\omega. \quad (20)$$

Необхідною умовою мінімуму V є вимога, щоб частинні похідні по кожному з коефіцієнтів дорівнювали нулю: $\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0$. Виконуючи диференціювання (20), отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = \iint_{\omega} \left\{ D \sum_1^n c_i \nabla^2 \psi_i \nabla^2 \psi_j - (1-\mu) \left[\sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y^2} + \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} - 2 \sum_1^n c_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x \partial y} \right] \right\} d\omega - \int_{\omega} p \psi_j d\omega = 0. \quad (21)$$

Рівняння (21) записані для $j = 1, 2, \dots, n$, дають систему рівнянь відносно коефіцієнтів c_i , яку можна записати у матричному вигляді

$$[A][c] = [b]. \quad (22)$$

$$\text{тут } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Коефіцієнти при невідомих A_{ij} та праві частини обчислюються за формулами

$$A_{ij} = \iint_{\omega} D \left[\nabla^2 \psi_i \nabla^2 \psi_j - (1-\mu) \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x \partial y} \right) \right] d\omega, \quad (24)$$

$$b_i = \int_{\omega} p(x, y) \psi_i d\omega. \quad (25)$$

Якщо пластина жорстко закріплена по контуру або вільно обперта та її контур обмежений прямими лініями, тоді для A_{ij} можна використовувати більш простий вираз

$$A_{ij} = \iint_{\omega} D \nabla^2 \psi_i \nabla^2 \psi_j d\omega; \quad (26)$$

Розв'язавши систему рівнянь (22) по формулі (19) отримаємо наближений розв'язок задачі.

Висновки

У доповіді були розглянуті теоретичні основи моделювання згину пластин жорстких дорожніх та аеродромних покриттів. На основі проведеного аналізу та дослідження були отримані наступні висновки:

1. Згин пластин є складним механічним процесом, який відбувається під впливом зовнішнього навантаження.

2. Використання різних теоретичних підходів, таких як теорія пружності, теорія пластичності та теорія пружно-пластичної деформації, дозволяє більш точно моделювати згин пластин та прогнозувати їх поведінку під навантаженням.

3. Врахування геометрії пластини, властивостей матеріалу та умов навантаження є важливими факторами при моделюванні згину пластин жорстких дорожніх та аеродромних покриттів.

4. Використання комп'ютерних технологій, зокрема програми Ansys, дозволяє проводити більш точне моделювання згину пластин та отримувати значення напружень та деформацій у реальному часі.

5. Результати моделювання згину пластин можуть бути використані для розробки нових конструкцій та матеріалів, які забезпечують оптимальну міцність та стійкість дорожніх та аеродромних покриттів.

У цілому, дослідження теоретичних основ моделювання згину пластин жорстких дорожніх та аеродромних покриттів мають велике значення для покращення якості та довговічності покриттів, а також для розвитку дорожнього будівництва та реконструкції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. AASHTO, „Design of Pavement Structures. Part II. Rigid Pavement Design & Rigid Pavement Joint Design”. AASHTO 1998.
2. Minnesota Department of Transportation, „Whitetopping Design Procedure” Minnesota Department of Transportation Office of Materials & Road Research Pavement Engineering Section, marzec 2012.
3. Родченко О. В. Розрахунок двошарових жорстких аеродромних покриттів за допомогою програмного комплексу «ЛИРА» / О. В. Родченко // Будівництво України. – 2008. – №9. – С. 37-41.
4. Advisory Circular 150/5320-6F. Airport Pavement Design and Evaluation, US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, 2016. USA Standard.
5. Шуляк І.С. Удосконалення методів випробувань дорожніх конструкцій при діагностуванні автомобільних доріг. - Дис. автореф. канд. техн. наук, К.: НТУ. – 2018. – 245 с.
6. Гамеляк І.П. Родченко О.В. Комп'ютерні технології проектування жорстких дорожніх одягів // Промислове будівництво та інженерні споруди Вип. 3. - 2020, С. 17-23.

Гамеляк Ігор Павлович, доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри аеропорти, e-mail: gip65n@gmail.com, ORCID ID: 0000-0001-9246-7561.

Лоза Ігор Андрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки, Національний транспортний університет, e-mail: meh kaf@ntu.edu.ua, ORCID ID: 0000-0002-2678-6908

Gameliak Igor P., Doctor of Engineering Sciences, professor, Head of department «Airports», National Transport University, e-mail: gip65@gmail.com, ORCID ID: 0000-0001-9246-7561.

Loza Ihor A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, National Transport University, e-mail: meh kaf@ntu.edu.ua, ORCID ID: 0000-0002-2678-6908