УДК 681.12

О. Ю. Співак
В. В. Задорожний
Д. О. Антошків

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ КОНВЕКТИВНОГО СУШІННЯ КЕРАМІЧНИХ ВИРОБІВ ПРОСТОЇ ФОРМИ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

На підставі моделі масопровідності запропоновано математичну модель процесу сушіння капілярно-пористих тіл у вигляді пластини. Модель враховує процес зневоднення в зонах із постійною і зі спадаючою швидкістю сушіння і побудована на отриманні аналітичного рішення нестаціонарної задачі масопровідності з граничними умовами третього роду. Для визначення адекватності даної математичної моделі, результати порівнювалися з виконаними авторами експериментальними дослідженнями.

Ключові слова: сушіння, масоперенесення, масопровідність.

Abstract

Based on the mass conductivity model, a mathematical model of the drying process of capillary-porous bodies in the form of plates is recommended. The model in the process zone with constant and decreasing drying speed is created on the obtained analytical solutions of the nonstationary mass conductivity problem with boundary conditions of the third kind. To determine the adequacy of the mathematical model were compared with the experimental studies performed by the authors.

Keywords: drying, mass transfer, mass conductivity.

Вступ

Теоретичний аналіз процесів сушіння, який опирається на елементарні процеси перенесення теплоти і вологи є досить складною задачею яка для реальних капілярно-пористих колоїдних тіл поки що не вирішена на числовим ні аналітичним шляхом. Оскільки параметри сушильного агента в процесі сушіння змінюються, як і характеристики самої сировини, що підлягає сушінню, теорія внутрішнього тепломасообміну обмежено (або досить громіздко) описує цей процес і для практичного використання малопридатна. В цьому випадку зручніше використовувати модель масопровідності.

Метою роботи є отримання аналітичного рішення нестаціонарної задачі масопровідності для сушіння капілярно-пористих тіл простої форми.

Результати дослідження

Запишемо рівняння масопровідності для плоскої пластини згідно з Рис.1. Початок системи координат розташуємо в будь-якій точці на площині симетрії цеглини. Вісь x направимо фронтально до поверхні пластини. Координатну площину (y, z) розташуємо перпендикулярно до осі x. В початковий момент сушіння приймемо $\tau = 0$.

Зміна вологовмісту в процесі сушіння описується відомим диференційним рівнянням масоперенесення [1].

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D\nabla u + D\delta_m \cdot \nabla T \ , \tag{1}$$

де ∇ – оператор Лапласа;

D – коефіцієнт молекулярної дифузії, м^2/с;

δ_m – термоградієнтний коефіцієнт;

Оскільки волога переміщується по пластині переважно вздовж осі x і випаровується в сушильний агент, а перенесення вологи по осях y і z незначне, приймемо, що вологовміст не залежить від координат y і z. Тоді рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\delta_m \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ , \tag{2}$$

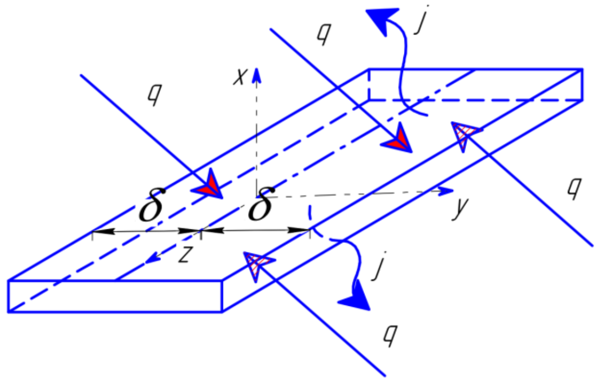

Рис. 1. Теплові потоки і потоки маси на пластині

Врахуємо залежність коефіцієнтів від часу. Рівняння перепишеться так

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = D(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) + D(\tau)\delta_m(\tau)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,\tau), \tag{3}$$

Це рівняння можна переписати в еквівалентному вигляді, з врахуванням, що коефіцієнт фазового перетворення $\varepsilon(x,\tau) \neq 1$ (рівність означає, що волога з поверхні пластини не випаровується).

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = \frac{D(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) + \frac{D(\tau)\delta_m(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,\tau). \right. \tag{4}$$

Запишемо умови однозначності.

В процесі сушіння змінюються теплофізичні характеристики сировини, приймемо, що вони лінійно залежать від температури.

$$\begin{aligned} a &= a_0(u) + k_a T, \\ \lambda &= \lambda_0(u) + k_\lambda T, \\ c &= c_0(u) + k_c T, \end{aligned} \tag{5}$$

де коефіцієнти $a_0, k_a, \lambda_0, k_\lambda, c_0, k_c$ є своїми для кожної конкретної сировини.

В момент початку сушіння $(\tau = 0)$ вважатимемо вологовміст сталим.

$$u(x,0) \equiv u_0. \tag{6}$$

Вважаючи, що площа торця пластини набагато менша від фронтальної площі, граничні умови запишемо для $x \pm \delta$, тобто розглядатимемо задачу для пластини товщиною 2δ.

Оскільки ефект бародифузії і термовологопровідності стає помітним тільки за температур більших від 100 ℃ [1], знехтуємо їх вкладом і запишемо граничні умови третього роду для рівняння масоперенесення

$$-\lambda_m(\delta,\tau)\frac{\partial u}{\partial x}(\delta,\tau) = \beta(\delta,\tau)\frac{\rho_s \rho_w \left(u(\delta,\tau)+1\right)}{\rho_w + \rho_s u(\delta,\tau)}\left(u(\delta,\tau) - d_{cp}\right), \tag{7}$$

де λ_m – коефіцієнт масопровідності, *(кг/(м·с))*;

β – коефіцієнт масовіддачі, *(м/с)*;

ρ_w і ρ_s – густина вологи і абсолютно сухої речовини відповідно, *(кг/м^3)*;

d_{cp} – вологовміст оточуючого середовища, *(кг/кг)*.

З міркувань симетрії отримаємо «внутрішню» граничну умову

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\tau) \equiv 0. \tag{8}$$

На першій стадії сушіння (сушіння з постійною швидкістю) потік маси від пластини є константою, бо на поверхні присутня вільна волога, а випаровування можна вважати адіабатним.

Враховуючи сказане, а також початкові і граничні умови, задачу розв'язуємо чисельно, розклавши в ряд $u(x,\tau)$, відкинувши складові зі степенями більше 2 як малі, і в силу симетрії задачі по x, отримаємо

$$u(x,\tau) \approx u_2(x,\tau) = u_0(\tau) + u_2(\tau)x^2. \tag{9}$$

Тоді рівняння масоперенесення з початковими умовами матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(\tau)+\frac{\partial u_2}{\partial \tau}(\tau)x^2=\frac{2D(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}\left(u_2(\tau)+6u_4(\tau)x^2\right)+ \\ +\frac{2D(\tau)\delta_m(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}\left(T_2(\tau)+6T_4(\tau)x^2\right), \\ u_0(0)+u_2(0)x^2\equiv u_0. \end{cases} \tag{10}$$

В систему необхідно додати також граничні умови (8) і (7) відповідно.

Прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x і з допущенням, що $\varepsilon(x,\tau)=0$ дає систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \tau}(\tau)=2D(\tau)u_2(\tau)+2D(\tau)\delta_m(\tau)T_2(\tau), \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau}(\tau)=12D(\tau)u_4(\tau)+12D(\tau)\delta_m(\tau)T_4(\tau). \end{cases} \tag{11}$$

В кінці другого періоду сушіння температура стала і дорівнює температурі сухого термометра сушильного агента, а задача зводиться до побудови функції вологовмісту [2]. Оскільки температура вирівнюється по всій товщині, складова $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ з рівняння масоперенесення пропаде, а рівняння набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}\left(x,\tau\right)\varepsilon(x,\tau)=D\left(\tau\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,\tau\right)+\varepsilon(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}\left(x,\tau\right). \tag{12}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)=\frac{D(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau). \tag{13}$$

Вважатимемо, що $\varepsilon(x,\tau)$ відома. Коефіцієнт $\frac{D(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}$ позначимо як A : $A=\frac{D(\tau)}{1-\varepsilon(x,\tau)}$.

Початкові умови матимуть вигляд

$$u(x,\tau_0)=C_0+C_2x^2, \tag{14}$$

де C_0 і C_2 знаходяться через середнє значення $\bar{u}(\tau_0)$, визначене експериментально.

Коефіцієнти масопровідності $\lambda_m(\delta,\tau)$ і масовіддачі $\beta(\delta,\tau)$ вважатимемо константами. Позначимо коефіцієнт $\frac{\beta\rho_w}{\lambda_m}$ як B : $B=\frac{\beta\rho_w}{\lambda_m}$.

Граничні умови приймуть вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\delta,\tau)=B\cdot u(\delta,\tau), \tag{15}$$

Запишемо задачу масоперенесення за зроблених допущень

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau)=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau), \\ u(x,\tau_0)=C_0+C_2x^2, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\delta,\tau)=B\cdot u(\delta,\tau). \end{cases} \tag{16}$$

Система рівнянь (18) є крайовою задачею третього роду . Скористаємось окремим випадком її розв’язку, справедливим для $Bi >> 1$ [3].

$$u(x,\tau)=K_1\exp\left(-A\mu^2\tau\right)\cos\mu x+K_0, \tag{17}$$

де K_1, K_0, μ – константи, які можна визначити з початкових і граничних умов [4].

Для першої стадії процесу сушіння чисельний розв’язок за допомогою математичного пакета Mathcad 15 системи рівнянь (11) дає часову залежність функції вологовмісту близьку до лінійної.

Для перевірки адекватності математичної моделі співставимо її результати з експериментальними, описаними в [5].

Для другої стадії, підставляючи значення констант в систему (16) можна побудувати криву сушіння, подану на рис. 2 разом з лінійною апроксимацією результатів експерименту [5].

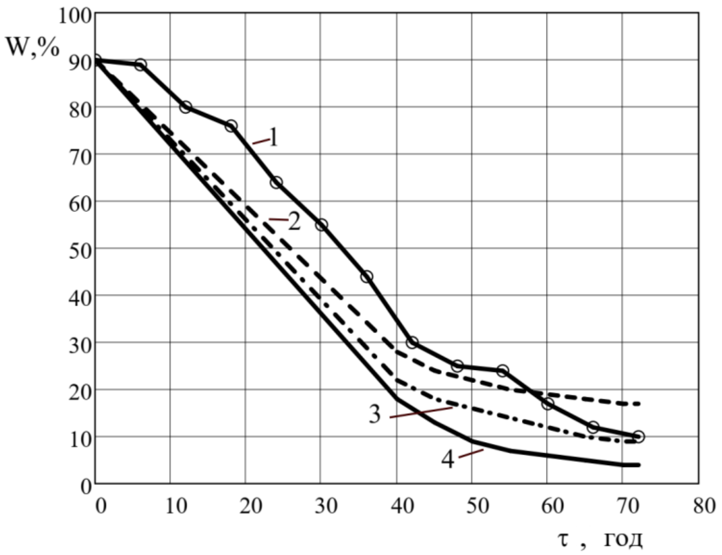

Рис. 2. Зміна відносної вологості капілярно-пористої пластини в процесі сушіння
1 – експериментальні дані [5], 2, 3, 4 – результати розрахунків, відповідно для температур сушильного агента 60, 75, 90 °C

Висновки

На стадії процесу сушіння з постійною швидкістю і в першій половині другого модель забезпечує задовільну точність. Похибка моделі накопичується по мірі процесу сушіння, оскільки модель є спрощеною і враховує не всі фактори, впливаючі на процес (наприклад механізм конвективного перенесення теплоти від сушильного агента на поверхню сировини) і, крім того, має суттєві допущення.

Середня відносна похибка всього процесу не перевищує 25% і показує добре співпадання розрахункових значень з експериментальними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1968. – 472с.
2. Співак О. Ю. Дослідження процесу сушіння обмазки зварювальних електродів методом математичного моделювання [Текст] / О. Ю. Співак // Сучасні технології, матеріали та конструкції в будівництві. – 2019. – № 1. – С. 61-65.
3. Мизонов В. Е. Уравнения математической физики. уч. пособ. / В. Е. Мизонов, Иваново, 2001. – 57 с.
4. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432с.
5. Співак О. Ю. Експериментальні дослідження процесу сушіння червоної цегли-сирцю [Електронний ресурс] / О. Ю. Співак // Матеріали XLVI науково-технічної конференції підрозділів ВНТУ, Вінниця, 22-24 березня 2017 р. - Електрон. текст. дані. - 2017. - Режим доступу : https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fbtegp/all-fbtegp-2017/paper/view/2769.

Співак Олександр Юрійович – канд. техн. наук, доцент кафедри теплоенергетики, Вінницького національного технічного університету, e-mail: spivak000@gmail.com.

Задорожний Вадим Вікторович – студент Вінницького національного технічного університету.

Антошків Дмитро Олегович – студент Вінницького національного технічного університету.

Spivak Olexandr Y. – Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of Building Heating and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: spivak000@gmail.com.

Zadorozhnyy Vadum V. **–** student Vinnytsia National Technical University.

Antoshkiv Dmytro O. **–** student Vinnytsia National Technical University.