

ЗАКОН ПЕРЕТВОРЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РЯДУ ФУР'Є ПРИ ВІДОБРАЖЕННІ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ В РОЗРИВНУ ПЕРШОГО РОДУ. МАТЕМАТИЧНИЙ ЕТЮД

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі досліджено нескінченновимірний лінійний гільбертів простір 2π -періодичних функцій, побудований над множиною дійсних чисел, із заданим в ньому скалярним добутком. Як результат математично отримано і описано узагальнений закон перетворення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є під час трансформації неперервної на періоді функції в розривну першого роду, що створило можливість для проведення прямого спектрального аналізу стосовно широкого класу розривних функцій, здатних аналітично описувати динаміку фізичних і технічних систем (наприклад, електротехнічних) у разі штучної дискретизації їх континуального руху в просторі та часі.

Ключові слова: спектральний аналіз, множина, відображення, закон відображення, лінійні простори функцій, скалярний добуток, евклідов та гільбертів простори, ортогональний та ортонормований базиси функцій, ряд Фур'є, коефіцієнти Фур'є, неперервна та розривна функція, тригонометричний ряд, узагальнене електричне коло, фізичне явище гіперсилової (гіпервалентної) взаємодії, силова електроніка, теоретичні основи електротехніки

Abstract

We study the infinite-dimensional linear Hilbert space of periodic functions over the set of real numbers with a given scalar product. The generalized law of transforming the coefficients of a trigonometric Fourier series under the mapping of a continuous function on a period into a discontinuous first kind is described mathematically. It was possible to directly perform spectral analysis of a wide class of discontinuous functions that are able to analytically describe the dynamics of physical and technical (for example, electrical) systems in the case of discretization of their continual motion in space and time.

Keywords: spectral analysis, set, map, law of transition, linear function space, scalar product, Euclidean and Hilbert spaces, orthogonal and orthonormal bases, Fourier series, Fourier coefficients, continuous and discontinuous function, trigonometric series, generalized electric circuit, phenomenon of the hyper-valence interaction, power electronics, electrical engineering theory

Вступ

Передмова

Загальновідомо [1], що основні для математичного аналізу класи дійсних, комплексних чи (узагальнено) векторозначних функцій відносно стандартних арифметичних операцій (як то додавання функцій та множення функції на число) утворюють лінійні простори S .

Кожна функція f з такого простору може бути представлена лінійною комбінацією

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \quad (1)$$

деякої системи лінійно незалежних функцій $\{f_1, f_2, \dots\}$, які також належать розглядуваному простору.

Для зазначених лінійно незалежних функцій $\{f_1, f_2, \dots\}$ лінійна комбінація дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k = 0 \text{ лише за умови } \alpha_k = 0, \text{ де } k \in \mathbb{N}, \text{ що є фундаментальною ознакою таких систем.}$$

З-поміж систем лінійно незалежних функцій $\{f_1, f_2, \dots\}$ найбільш практичними для розкладання виду (1) є ортогональні $\{s_1, s_2, \dots\}$ або ортонормовані $\{e_1, e_2, \dots\}$ системи. Для їх ідентифікації

використовують операцію скалярного добутку (f, g) , внаслідок чого зазначені в розкладанні (1) лінійно незалежні функції $\{f_1, f_2, \dots\}$ лінійного простору S із визначеним на ньому скалярним добутком будуть: 1) ортогональною системою функцій (або ортогональним базисом) $\{s_1, s_2, \dots\}$, якщо для будь-якого комбінаторного сполучення пари індексів $i, j \in \mathbb{N}$ скалярний добуток таких функцій $(s_i, s_j) = 0, i \neq j$; 2) ортонормованою системою функцій (або ортонормованим базисом) $\{e_1, e_2, \dots\}$, якщо скалярний добуток $(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Розкладання (1) в ортогональному $\{s_1, s_2, \dots\}$ або ортонормованому $\{e_1, e_2, \dots\}$ базисах носить назву ряду Фур'є. В свою чергу, числа $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції f , визначеними відносно заданого ортогонального або ортонормованого базисів.

Кожний коефіцієнт ряду Фур'є α_k є скалярним добутком функції f з відповідною цьому коефіцієнту функцією s_k (або e_k), приведеною до квадрату її норми $\|s_k\|^2 = (s_k, s_k)$, оскільки $(f, s_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i s_i, s_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (s_i, s_k) = \alpha_k (s_k, s_k)$. Тоді для ортогонального базису $\{s_1, s_2, \dots\}$ $\alpha_k = \frac{(f, s_k)}{(s_k, s_k)}$, а для ортонормованого $\{e_1, e_2, \dots\}$ – $\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} = (f, e_k)$, позаяк $(e_k, e_k) = \|e_k\|^2 = 1$.

Геометрична інтерпретація функції f як вектора, який задано в розглядуваному лінійному просторі функцій S , виявляє кожний з коефіцієнтів Фур'є α_k як проекцію $\alpha_k = (f, e_k)$ цього вектора f на напрям одиничного вектора e_k з ортонормованої системи функцій $\{e_1, e_2, \dots\}$, де кожна з таких функцій теж подається як векторна величина, але з нормою, що дорівнює одиниці.

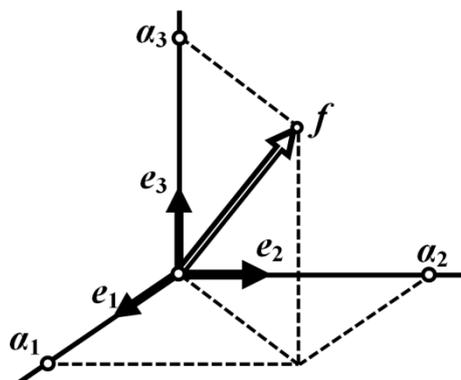


Рис. 1 Наближена геометрична аналогія між гільбертовим простором функцій та тривимірним евклідовим простором

У випадку розкладання функції f як вектора в ортогональному базисі $\{s_1, s_2, \dots\}$ коефіцієнти Фур'є α_k будуть числами, пропорційними зазначеним проекціям (f, e_k) , тільки вже з коефіцієнтами пропорційності, відмінними від одиниці і оберненими до норми:

$$\alpha_k = \frac{(f, s_k)}{(s_k, s_k)} = \frac{(f, \|s_k\| e_k)}{\|s_k\|^2} = \frac{(f, e_k)}{\|s_k\|}. \quad (2)$$

Через наявну часткову ізоморфність корисною також є наближена геометрична аналогія поміж скінченновимірним евклідовим простором з фізично-зручною вимірністю $n=3$ та нескінченновимірним гільбертовим простором розглядуваних нами функцій f (рис. 1) з повнотою відносно метрики, індукованої природною нормою на ньому.

З-поміж ортогональних базисів, як з теоретичної, так і прикладної точок зору, надзвичайно важливою є тригонометрична система функцій:

$$\{1, \cos k\theta, \sin k\theta; k \in \mathbb{N}\}, \quad (3)$$

яка зводить розкладання 2π -періодичних функцій з деякої області лінійного простору в окремий випадок ряду Фур'є – тригонометричний ряд Фур'є

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta. \quad (4)$$

Оскільки не кожен тригонометричний ряд може бути рядом Фур'є, достатніми умовами ідентифікації 2π -періодичної функції f та розкладання її в ряд Фур'є, є умови Діріхле, виконання яких гарантує збіжність тригонометричного ряду на проміжку $[-\pi, \pi]$ до значень функції f .

Коефіцієнтами Фур'є в розкладанні (4) тригонометричного ряду Фур'є є числа:

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

які неважко отримати на підставі (4), задавши в лінійному нормованому просторі функцій S операцію скалярного добутку.

Для дійсних функцій f та g скалярний добуток визначено як інтеграл

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta. \quad (7)$$

Постановка задачі

Введемо поняття руху в гільбертовому просторі функцій S .

Цьому сприяє геометрична інтерпретація функції f як радіус-вектора, яку на прикладі

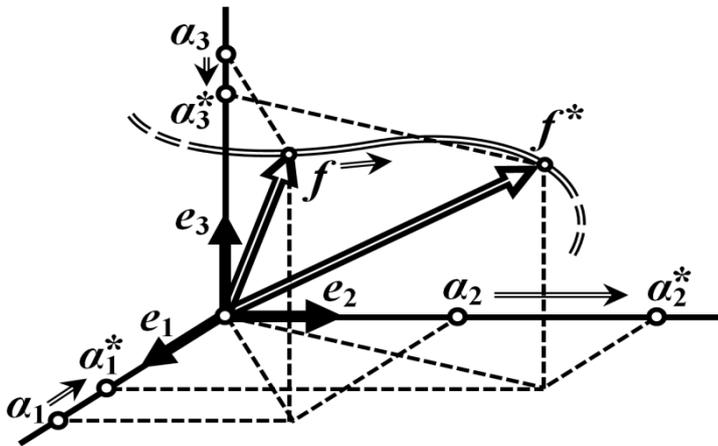


Рис. 2 Геометрична інтерпретація руху в гільбертовому просторі функцій (на прикладі евклідового простору) та перетворення коефіцієнтів Фур'є (координат в ортонормованому базисі), що супроводжує цей рух

евклідового простору показано на рис. 1.

В свою чергу, рис. 2 на прикладі того ж тривимірного евклідового простору демонструє вже геометричну інтерпретацію процесу руху в гільбертовому просторі функцій і водночас виявляє перетворення коефіцієнтів Фур'є як координат в ортонормованому базисі, що супроводжує цей рух.

Остання обставина є важливою і дозволяє визначити поняття руху в лінійному просторі функцій, скориставшись теоретико-множинним підходом.

Отже, рухом в лінійному просторі функцій S (евклідовому, ермітовому чи ж бо гільбертовому) із заданою в ньому

системою ортонормованих або ортогональних базисних функцій називатимемо послідовне (неперервне або розривне) у часі t відображення за заданим законом L множини F коефіцієнтів Фур'є функції f в множину F^* коефіцієнтів Фур'є функції f^*

$$L: F(f) \rightarrow F^*(f^*) \quad (8)$$

під час послідовного (неперервного або розривного) відображення першої із зазначених функцій в другу $L: f \rightarrow f^*$.

Оскільки рух – це зміна у часі стану (положення та швидкості або імпульсу) деякого об'єкта (або системи) за заданим законом в заданому координатному базисі, то за введеною інтерпретацією руху в лінійному просторі функцій кожна розкладена в ряд Фур'є функція f і є тією якістю, яка визначає поточний стан (надалі – тільки положення) цього об'єкта. Тоді закон руху L , який описує рух в лінійному просторі S , природно, є функціоналом, позаяк визначений на множині функцій f .

Водночас ідентифікація самого об'єкта руху в лінійному просторі функцій S наразі викликає труднощі, оскільки вимагає введення нового поняття. Назвемо зазначений об'єкт руху *функціональною точкою*, поточний стан (положення) якої в лінійному просторі S бієктивно визначається функцією f , де в цей момент часу функціональна точка перебуває, або системою коефіцієнтів Фур'є цієї функції на заданому ортонормованому або ортогональному базисі.

Введення поняття руху в лінійному просторі функцій S природно породжує необхідність виявлення та дослідження *статичних, кінематичних та динамічних* властивостей цього руху та

встановлення кореляційного зв'язку з тими системами, які ці функціональні простори створюють, наприклад, з динамічними системами фізичного або технічного походження, а також структурно узагальненими на основі явища гіперсилової (гіпервалентної) взаємодії абстрактними динамічними системами, представленими в роботах [2-6].

Автор переконаний, що зазначене в широкому розумінні має бути серед головних задач під час

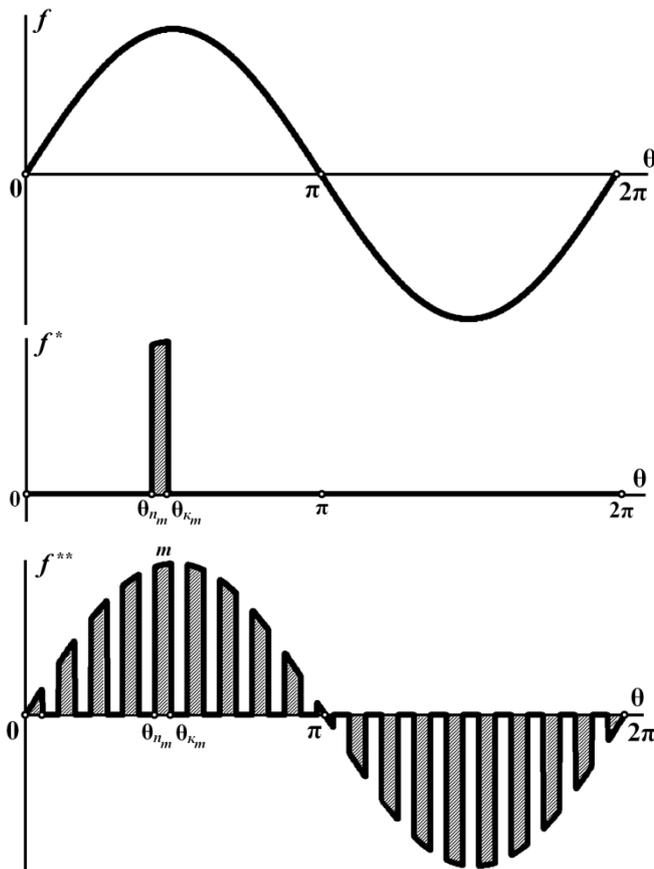


Рис. 3 Приклад відображення неперервної на періоді функції f в розривну першого роду f^* та узагальнений характер останньої як основи в побудові класу кусково-неперервних 2π -періодичних функцій f^{**}

дослідження істотних властивостей як динамічних систем, наприклад, електричних кіл [7-9], так і тих просторів, в яких ці системи існують.

Оскільки задача в широкому розумінні є комплексною, то наразі сформулюємо і розв'яжемо її у вузькому розумінні, зосередивши увагу лише на одній з можливих декомпозицій цієї задачі.

Наразі відшукаємо закон відображення (8) коефіцієнтів ряду Фур'є для класу 2π -періодичних дійсних функцій f , які задовольняють умови Діріхле, за умови послідовного переміщення функціональної точки з початкового положення, якому відповідає деяка неперервна на періоді функція f з коефіцієнтами Фур'є $F(f)$, в кінцеве положення, де інша функція f^* з коефіцієнтами $F^*(f^*)$ одну (!) пару розривів першого роду, яка на періоді утворює проміжок $[\theta_1, \theta_2]$, де функція f^* є тотожною до вихідної функції f , а поза межами цього проміжку – дорівнює нулю (рис. 3),

$$f^*(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta < \theta_1; \\ f(\theta), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ 0, & \theta_2 < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (9)$$

Вибір такої функції f^* не є випадковим,

оскільки досить широкий клас 2π -періодичних функцій f^{**} , які мають кінцеву кількість p пар розривів першого роду і утворюють на періоді послідовність довільних проміжків $[\theta_{1_m}, \theta_{2_m}]$, де кожна з функцій f^{**} є тотожною до вихідної функції f , а поза їх межами – дорівнює нулю, може бути представлений, як це показано на рис. 3, як сума функцій типу f^* з наступними алгебраїчними перетвореннями в розкладаннях Фур'є обидвох функцій f^{**} та f^*

$$f^{**} = \sum_{m=1}^p f_m^* = \sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{m,k}^* s_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^p \alpha_{m,k}^* s_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{**} s_k, \quad (10)$$

звідки для їхніх коефіцієнтів Фур'є маємо

$$\alpha_k^{**} = \sum_{m=1}^p \alpha_{m,k}^*, \quad k=1,2,\dots \quad (11)$$

Мета роботи

Метою роботи є розв'язання сформульованої задачі у вузькому її розумінні з визначенням в аналітичній формі закону відображення (8) функції f в функцію f^* за зазначених вище умов.

Успішна реалізація результатів роботи доповнить спектральний (частотний) метод аналізу наразі відсутніми математичними моделями, здатними безпосередньо виявляти та оцінювати розподіл спектральних складових з тригонометричного ряду Фур'є в просторі (функціональному, фізичному, енергетичному, інформаційному, алгоритмічному тощо) заданої технічної системи у разі динамічного режиму її роботи.

Зазначене, наприклад, стосується електротехнічних пристроїв та систем сучасної силової напівпровідникової електроніки, де, подібно інформаційним системам, генерування, транспортування та перетворення електричної (електромагнітної) енергії, як і інформації, здійснюється (і це на сьогодні є парадигмою в сучасній концепції розвитку електроніки), у спосіб дискретизації континуальних фізичних процесів, які виявляють себе в таких системах [10, 11].

Розв'язування задачі (основна частина)

Надалі розглядатимемо лише 2π -періодичні функції з локальної області $\mathcal{H}([0, 2\pi], \mathbb{R}) \subset S$ лінійного простору S , заданого над полем дійсних чисел \mathbb{R} , з скалярним добутком (7).

1. Отже, вихідною 2π -періодичною функцією, яка визначає початковий стан функціональної точки в просторі S , є довільна функція f , яка задовольняє умови Діріхле, і з-поміж інших функцій заданого простору вирізняється повнотою неперервності по усій області свого визначення.

Розкладаємо зазначену функцію f по системі ортогональних базисних функцій (3) і подаємо тригонометричний ряд Фур'є (4) у вигляді

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\theta), \quad (12)$$

де за незалежну змінну слугує кут $\theta = \omega t$. В свою чергу, t – час перебігу можливого фізичного процесу в технічній системі, а ω – кутова частота коливань $\omega = 2\pi f$ цього процесу.

Коефіцієнти Фур'є в однойменному тригонометричному ряді (12) функції f визначаємо на підставі співвідношень (5) і (6). Тоді

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta; \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta; \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta. \quad (13)$$

Спектральні гармоніки $f_k(\theta)$ в формулі (12)

$$f_0(\theta) = A_0; \quad f_k(\theta) = F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k), \quad (14)$$

де амплітуда кожної k -ої гармоніки f_k функції f

$$F_{m_k} = \sqrt{(A_k)^2 + (B_k)^2}, \quad (15)$$

а її початкова фаза –

$$\psi_k = \begin{cases} \arctg \frac{A_k}{B_k}, & B_k \geq 0; \\ \pm\pi + \arctg \frac{A_k}{B_k}, & B_k < 0. \end{cases} \quad (16)$$

2. Функція f^* (9) в нашому дослідженні визначає кінцевий стан функціональної точки, яким завершується її рух в локальній області $\mathcal{H}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ лінійного простору S .

Наявність в функції f^* двох розривів першого роду не порушує умов Діріхле, тому тригонометричний ряд Фур'є (4) цієї функції є збіжним. Коефіцієнти Фур'є знаходимо відповідно до формул (4)-(6)

$$A^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(\theta) d\theta; \quad A^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(\theta) \cos n\theta d\theta; \quad B^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(\theta) \sin n\theta d\theta. \quad (17)$$

Сам ряд Фур'є (4) подаємо у вигляді

$$f^*(\theta) = A^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A^n \cos n\theta + B^n \sin n\theta) = A^0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_m^n \sin(n\theta + \psi^n) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(\theta), \quad (18)$$

де спектральні гармонічні складові

$$f^0(\theta) = A^0; \quad f^n(\theta) = F_m^n \sin(n\theta + \psi^n),$$

в яких амплітуда k -ої гармоніки f^k функції f^*

$$F_m^n = \sqrt{(A^n)^2 + (B^n)^2}, \quad (19)$$

а початкова фаза –

$$\psi^n = \begin{cases} \arctg \frac{A^n}{B^n}, & B^n \geq 0; \\ \pm\pi + \arctg \frac{A^n}{B^n}, & B^n < 0. \end{cases} \quad (20)$$

3. Додатково зауважимо, що оскільки система функцій (3) ортогональна, отримані коефіцієнти Фур'є (13) та (17) не є проєкціями функцій f та f^* , але їм пропорційні, відповідно до (2).

Також додамо, що коефіцієнти Фур'є як, з одного боку, A_k та B_k неперервної функції f , так і з іншого – A^k та B^k розривної f^* за однакових значень k утворюють впорядковані пари, які позначимо так: $(A_k, B_k) = (A, B)_k$ та $(A^k, B^k) = (A, B)^k$ відповідно.

4. Розкладемо функцію f^* в альтернативний спосіб, скориставшись для цього дещо іншою від ортогонального базису (3) системою допоміжних функцій $\{f_k^*; k = 0, 1, \dots\}$:

$$f_0^*(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta < \theta_1; \\ A_0, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ 0, & \theta_2 < \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad f_k^*(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta < \theta_1; \\ f_k(\theta), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ 0, & \theta_2 < \theta \leq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta < \theta_1; \\ F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ 0, & \theta_2 < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (21)$$

де F_{m_k} та ψ_k – це амплітуди та початкові фази спектральних гармонік функції f , які визначаються за формулами (19) та (20) безпосередньо через коефіцієнти Фур'є.

Графіки системи допоміжних функцій (21) показано на рис. 4.

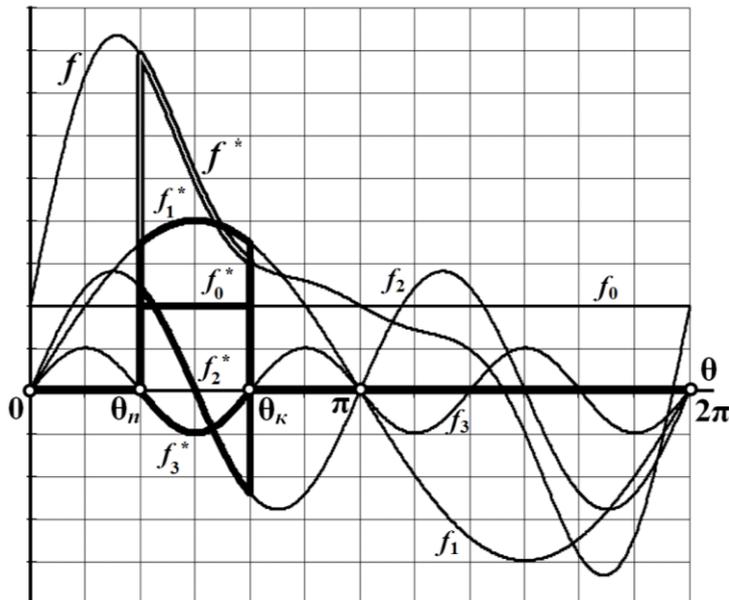


Рис. 4 Альтернативний спосіб розкладання функції f^*

Як бачимо, функції $\{f_k^*; k=0, 1, \dots\}$ є розривними першого роду. На проміжку $[\theta_1, \theta_2]$ вони тотожні спектральному складовим $f_k(\theta)$ з тригонометричного ряду Фур'є (12), але водночас на періоді поза межами проміжку значення цих функцій дорівнюють нулю.

Можливість вищезазначеного розкладання обумовлена співвідношеннями (9) та (12), у відповідності з якими для функції f^* маємо:

$$f^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(\theta). \quad (22)$$

Додамо, що система допоміжних функцій (21) також утворює ортогональний базис функцій, що нескладно довести через ортогональність функцій системи функцій (3).

5. Розриви першого роду в системі функцій $\{f_k^*; k=0, 1, \dots\}$ не призводять до порушення умов Діріхле. Тому кожна з цих функцій може бути розкладена в тригонометричний ряд Фур'є

$$f_k^*(\theta) = A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_k^n \cos n\theta + B_k^n \sin n\theta) \quad (23)$$

з власними коефіцієнтами Фур'є $\{A_k^0, A_k^n, B_k^n\}$, де

$$A_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k^*(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_k(\theta) d\theta, \quad k=0, 1, \dots; \quad (24)$$

$$A_k^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_k^*(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_k(\theta) \cos n\theta d\theta; \quad k=0, 1, \dots; \quad n=1, 2, \dots; \quad (25)$$

$$B_k^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_k^*(\theta) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_k(\theta) \sin n\theta d\theta; \quad k=0, 1, \dots; \quad n=1, 2, \dots. \quad (26)$$

6. Формули (24)-(26) безпосередньо виявляють і визначають множину законів відображення $M = \{M_k^n; k=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots\}$ відповідних індексу k коефіцієнтів Фур'є $\{A_0, A_k, B_k; k=1, 2, \dots\}$ неперервної функції f в множину коефіцієнтів Фур'є $\{A_k^n, B_k^n; k=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots\}$ відповідних цьому індексу k допоміжних функцій $\{f_k^*; k=0, 1, \dots\}$.

З урахуванням співвідношень (21) для зазначеного закону відображення M маємо

$$M = \left\{ M_0^n : A_0 \rightarrow \{A_0^n\}, M_k^n : (A, B)_k \rightarrow \{(A, B)_k^n\}; k=1, 2, \dots; n=0, 1, \dots \right\}. \quad (27)$$

7. Визначимося з законами відображення $M = \{M_k^n; k=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots\}$.

Для цього підставимо в співвідношення (24)-(26), записані для коефіцієнтів Фур'є $\{A_k^0, A_k^n, B_k^n\}$ допоміжних функцій $\{f_k^*; k=0, 1, \dots\}$, спектральні гармоніки (14)-(16) неперервної функції f .

В результаті отримаємо такі співвідношення:

1) для закону відображення M_0^0 :

$$A_0^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0 d\theta = \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) A_0; \quad (28)$$

2) для законів відображення M_0^n , де $n=1, 2, \dots$:

$$A_0^n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0 \cos n\theta d\theta = \frac{-1}{n\pi} (\sin n\theta_1 - \sin n\theta_2) A_0; \quad (29)$$

$$B_0^n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0 \sin n\theta d\theta = \frac{1}{n\pi} (\cos n\theta_1 - \cos n\theta_2) A_0; \quad (30)$$

3) для законів відображення M_k^n , де $k=1, 2, \dots$, а $n=0, 1, \dots$:

а) для випадку, коли $n=0$:

$$A_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k) d\theta = \frac{F_{m_k}}{2\pi k} [\cos(k\theta_1 + \psi_k) - \cos(k\theta_2 + \psi_k)]; \quad (31)$$

б) для випадку, коли $k=n$:

$$A_k^n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k) \cos n\theta d\theta = \frac{F_{m_k}}{4\pi k} [2k(\theta_2 - \theta_1) \sin \psi_k + \cos(2k\theta_1 + \psi_k) - \cos(2k\theta_2 + \psi_k)]; \quad (32)$$

$$B_k^n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k) \sin n\theta d\theta = \frac{F_{m_k}}{4\pi k} [2k(\theta_2 - \theta_1) \cos \psi_k + \sin(2k\theta_1 + \psi_k) - \sin(2k\theta_2 + \psi_k)]; \quad (33)$$

в) для випадку, коли $k \neq n$:

$$A_k^n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k) \cos n\theta d\theta = \frac{F_{m_k}}{2\pi(k^2 - n^2)} \left\{ (k-n) [\cos((k+n)\theta_1 + \psi_k) - \cos((k+n)\theta_2 + \psi_k)] + (k+n) [\cos((k-n)\theta_1 + \psi_k) - \cos((k-n)\theta_2 + \psi_k)] \right\}; \quad (34)$$

$$B_k^n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{m_k} \sin(k\theta + \psi_k) \sin n\theta d\theta = \frac{F_{m_k}}{2\pi(k^2 - n^2)} \left\{ (k-n) [\sin((k+n)\theta_1 + \psi_k) - \sin((k+n)\theta_2 + \psi_k)] - (k+n) [\sin((k-n)\theta_1 + \psi_k) - \sin((k-n)\theta_2 + \psi_k)] \right\}, \quad (35)$$

де в усіх випадках, відповідно до співвідношень (15) та (16),

$$F_{m_k} = \sqrt{(A_k)^2 + (B_k)^2}; \quad \psi_k = \begin{cases} \arctg \frac{A_k}{B_k}, & B_k \geq 0; \\ \pm\pi + \arctg \frac{A_k}{B_k}, & B_k < 0. \end{cases}$$

8. Множину законів відображення N коефіцієнтів Фур'є $\{A_k^n, B_k^n; k=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots\}$ допоміжних функцій $\{f_k^*; k=0, 1, \dots\}$ в коефіцієнти Фур'є $\{A^0, A^k, B^k; k=1, 2, \dots\}$ функції f^* знайдемо, скориставшись формулами (22) та (23).

В цьому випадку для функції f^* маємо

$$\begin{aligned} f^*(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_k^n \cos n\theta + B_k^n \sin n\theta) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k^n \right) \cos n\theta + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^n \right) \sin n\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

У спосіб співвіднесення тригонометричного ряду Фур'є (18) функції f^* з формулою (36)

$$A^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A^n \cos n\theta + B^n \sin n\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k^n \right) \cos n\theta + \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k^n \right) \sin n\theta$$

отримуємо шукану множину законів для другого перетворення:

$$N = \left\{ N^0 : \{A_k^0\} \rightarrow A^0, N^n : \{(A, B)_k^n\} \rightarrow (A, B)^n; k=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots \right\}, \quad (37)$$

а саме

$$A^0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^0; \quad A^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^n; \quad B^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^n. \quad (38)$$

9. Отже, шуканий закон відображення L (8) коефіцієнтів Фур'є, яке спостерігається внаслідок руху функціональної точки в локальній області $\mathcal{H}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ лінійного гільбертового простору S від неперервної функції f до розривної першого роду f^*

$$L: \{A_0, (A, B)_k\} \rightarrow \{A^0, (A, B)^k\}, k = 1, 2, \dots,$$

є композицією (!) двох законів відображення

$$L = N \circ M. \tag{39}$$

Рис. 5 в образотворчій формі розкриває суть цієї композиції і її характерні та істотні ознаки, зокрема присутній в ній нескінченновимірний поліморфізм.

Перший із зазначених законів

$$M: \{A_0, (A, B)_k\} \rightarrow \left\{ \{A_0^n\}, \{(A, B)_k^n\} \right\}, k = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots,$$

відповідно до (27), визначено як множинний закон, який утворює множину відображень, узагальнено і повно розкритих в аналітичній формі в формулах (28)-(35), а також – в (15) та (16), а другий

$$N: \left\{ \{A_k^0\}, \{(A, B)_k^n\} \right\} \rightarrow \{A^0, (A, B)^n\}, k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots$$

є множинним законом множини відображень (37), аналітична сутність кожного з елементів якого розкрита формулами (38).

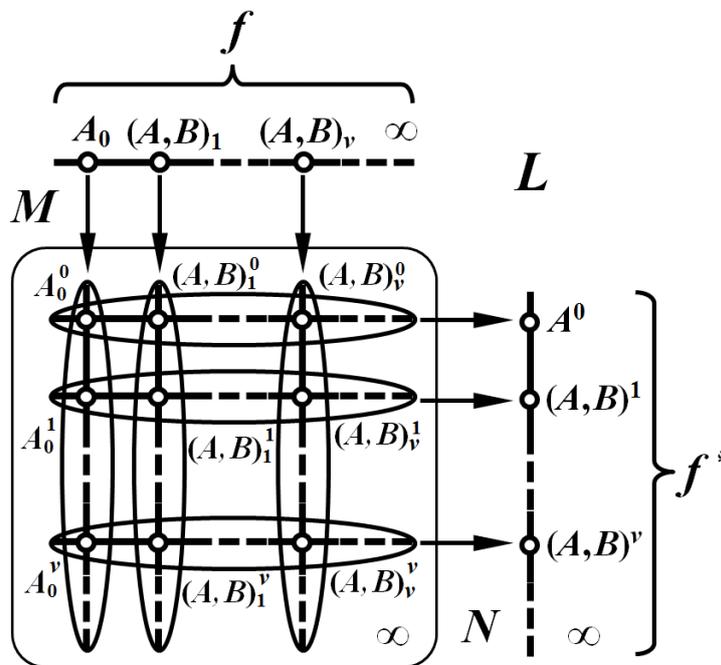


Рис. 5 Композиція закону відображення $L=N \circ M$ коефіцієнтів Фур'є

10. Додатково зазначимо, що клас 2π -періодичних функцій f^{**} , які на періоді мають кінцеву кількість p пар розривів першого роду (див. рис. 3), відповідно до формули (10) є послідовністю p композицій відображення (39), внаслідок чого закон відображення їх коефіцієнтів Фур'є визначатиметься співвідношенням (11).

Висновки

Отже, в роботі досліджено нескінченновимірний лінійний гільбертів простір 2π -періодичних функцій, побудований над множиною дійсних чисел, із заданим в ньому скалярним добутком. Як результат математично отримано і описано узагальнений закон перетворення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є під час трансформації неперервної на періоді функції в розривну

першого роду, що створило можливість для проведення прямого спектрального аналізу стосовно широкого класу розривних функцій, здатних аналітично описувати динаміку фізичних і технічних (наприклад, електротехнічних) систем у разі штучної дискретизації їх континуального руху в просторі та часі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том I / А. Пуанкаре. — М. : Изд-во «Наука», 1971. — 771 с.
2. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло з урахуванням фізичного явища гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — Хмельницький. — №2(58). — 2017. — С. 29-36.
3. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2016. — Випуск 4. — С. 207-213.
4. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довільного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Випуск 2. — С. 63-69.
5. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : монографія / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 196 с.
6. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіпервалентної взаємодії в структурних рівняннях узагальненого кола / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювання, контроль та діагностика в технічних системах (ВКДТС-2017) : IV Міжнародна наукова конференція пам'яті професора В. Поджаренка, 31 жовтня - 02 листопада 2017 р., Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна : тези доп. — С. 38-39. — Вінниця: ПП «ГД «Едельвейс і К»», 2017.
7. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Каців. — 2-ге видання, Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. — 456 с. — (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, лист №1/11-10710 від 23.11.2010 р.).
8. Теоретичні основи електротехніки. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. — 262 с. — (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України, лист №1/11-16647 від 30.12.2016 р.).
9. Ведміцький Ю. Г. Біноміальні перетворення в формуванні узагальненої задачі Коші / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — №3(120). — Вінниця. — 2015. — С. 91-95.
10. Ведміцький Ю. Г. Аналітичне квантування неперервних, кусково-неперервних та дискретних сигналів / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Інженерної академії України. — 2012. — Випуск 1. — С. 106-112.
11. Рифкин Дж. Третья промышленная революция. Как горизонтальные взаимодействия меняют энергетику, экономику и мир в целом / Джереми Рифкин; пер. с англ. — М. : Альпина нон-фикшн, 2014.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net